

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Dpto. de Teoría de la Señal y Comunicaciones



PROYECTO FIN DE CARRERA

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN:
SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN

JULIO 2015

“SEGUIMIENTO DE CANALES NO LINEALES EN COMUNICACIONES MÓVILES OFDM”

Autor: Diego Méndez Romero

Tutora: Dra. M^a Julia Fernández-Getino García

PROYECTO FIN DE CARRERA

Dpto. de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Ingeniería Técnica de Telecomunicación: Sistemas de
Telecomunicación

Título: Seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM

Autor: Diego Méndez Romero

Tutora: Dra. M^a Julia Fernández-Getino García

EL TRIBUNAL

Presidente: Eva Rajo Iglesias

Secretario: José Joaquín Escudero Garzás

Vocal: Mario Muñoz Organero

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera
el día 29 de julio de 2015 en Leganés, en la Escuela Politécnica
Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle
la CALIFICACIÓN de:

Matrícula de Honor (10)

Fdo: Presidente

Fdo: Secretario

Fdo: Vocal

Seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM

Diego Méndez Romero

29 de julio de 2015

Prefacio

En primer lugar, me gustaría expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas que me han enseñado que pensar vale la pena, y especialmente a don Manuel, mi padre, por tantos años de debates y desafíos intelectuales, y por insistir siempre (contra el comportamiento general troglodita) en que más vale inventar la rueda que cargar las piedras a pulso. Que mi familia y mi entorno me educaran en pensar ha sido mi mayor privilegio.

Ellos escribieron las letras más importantes de todo lo que hago: este trabajo también es mérito suyo.

Abstract

Orthogonal Frequency-Division Multiplexing (OFDM) has spread quickly and it has become the base for many communication technologies. One of the most frequently proposed techniques for time-variant channel tracking (in an OFDM environment) is Kalman filtering (KF) and its many adaptations and extensions. KF's advantage is its optimality as an estimator for linear problems. However, as mobile communications spread into more dynamic channels (e. g. high-speed trains in rugged terrain), non-linear components (such as path birth and death) appear and they could be catastrophic for KF-based estimation techniques. This project creates a model to calibrate the extent to which KF performance degrades. Starting off from a Linear Gauss-Markov channel model (simulation 1), we implement a Kalman-filter bank for multipath estimation (simulation 2) and we prove that, once a dynamic including path birth and death is introduced, the performance of the KF estimator degrades dramatically and catastrophically (simulation 3). At last, we prove that a path-birth-and-death environment behaves in a completely different manner than an environment wherein the number of paths is constant, but there are fewer paths than expected (simulation 4). These 4 simulations suggest that it is necessary to incorporate the stochastic behaviour of the channels into the estimation and tracking algorithms for future improvements in wireless communication systems with coherent detections. Accordingly, we review some proposed techniques in the literature, with a special focus on the application of Finite Random Set Theory.

Keywords: OFDM, Kalman filtering, Gauss-Markov, Random Set Theory, tracking, non-linear channels, mobile communications

Resumen

La tecnología OFDM se ha extendido rápidamente y se ha convertido en la base de numerosas tecnologías de comunicaciones. Una de las técnicas propuestas con mayor frecuencia para realizar el seguimiento de canales variantes en el tiempo (en el marco de comunicaciones OFDM) es el filtrado de Kalman (KF) y diversas adaptaciones y ampliaciones del KF. La ventaja del KF es su carácter óptimo como estimador de problemas lineales. Sin embargo, a medida que las comunicaciones móviles se extienden a entornos con canales más dinámicos (p. ej. trenes de alta velocidad en entornos montañosos), aparecen componentes no lineales (como el nacimiento y la muerte de trayectos) que podrían resultar catastróficos para las técnicas de estimación basadas en KF. Este trabajo crea un modelo para calibrar hasta qué punto se degradan las prestaciones del KF. Partiendo de un modelo de Gauss-Markov lineal para el canal (simulación 1), implementamos un banco de filtros de Kalman para la estimación multitrayecto (simulación 2) y probamos que, al introducir una dinámica de nacimiento y muerte de trayectos, las prestaciones del estimador KF se degradan de manera vertiginosa y catastrófica (simulación 3). Por último, probamos que una situación de nacimiento y muerte de trayectos es completamente distinta a una situación en la que hay un número de trayectos constante, pero menor del esperado (simulación 4). Estas cuatro simulaciones sugieren que resulta imprescindible incorporar el comportamiento estocástico de los canales a los algoritmos de estimación y seguimiento para futuras mejoras en sistemas de comunicación inalámbricos con detección coherente. En este sentido, revisamos también algunas técnicas propuestas en la literatura, centrándonos especialmente en la aplicación de la Teoría de Conjuntos Aleatorios Finitos.

Palabras clave: OFDM, filtrado de Kalman, Gauss-Markov, Teoría de Conjuntos Aleatorios, seguimiento, canales no lineales, comunicaciones móviles

Índice

1	Estructura y objetivos del proyecto	15
1.1	Introducción	15
1.2	Contexto en el que surge el proyecto	17
1.3	Objetivos del proyecto	18
1.4	Estructura del documento	19
1.4.1	Bloque teórico (capítulos 2 a 5)	20
1.4.2	Bloque de simulaciones (capítulos 6 a 9)	20
2	OFDM y modelos de canal	22
2.1	Explicación básica de OFDM	22
2.2	Modelado genérico de sistemas OFDM	24
2.3	Modelo en tiempo continuo	25
2.3.1	Transmisor	26
2.3.2	Canal físico	27
2.3.3	Receptor	27
2.4	Modelo de tiempo discreto	29
2.5	Modelo empleado para las simulaciones	30
3	Filtro de Kalman	32
3.1	¿Qué es el filtro de Kalman?	32
3.1.1	Aplicaciones y breve descripción del algoritmo	33
3.1.2	Explicación simplificada de la ecuación básica	33
3.2	Planteamiento del problema de estimación lineal	36
3.2.1	Modelo de planta	36
3.2.1.1	Ecuación escalar para el modelo de planta	36
3.2.2	Modelo de medición	37
3.2.2.1	Ecuación escalar para el modelo de ob- servación	38
3.2.3	Ecuaciones del ruido de planta	38

3.2.4	Ecuaciones del ruido de observación	39
3.2.5	Objetivo de la estimación	39
3.3	Solución al problema de estimación lineal	39
3.3.1	Paso 1: Extrapolación de la covarianza del error .	40
3.3.2	Paso 2: Actualización de la estimación del estado	40
3.3.3	Paso 3: Actualización de la covarianza del error .	41
3.3.4	Paso 4: Cálculo de la estimación y recursión . . .	41
3.4	Tratamiento de los vectores de medición con errores in- correlacionados como escalares	42
3.5	Aplicaciones del KF en el seguimiento de canales para OFDM	43
3.5.1	El seguimiento KF supera a la estimación basada en secuencias de entrenamiento	43
3.5.2	KF para seguimiento de los subcanales en el tiempo según el modelo de Jakes	44
3.5.3	Una aplicación del carácter predictivo del KF . .	44
3.5.4	KF: límites teóricos vs. límites prácticos	44
3.5.5	Combinación de KF con otros algoritmos potentes	45
3.5.6	KF en canales con parámetros desconocidos y en canales con tendencias	46
3.5.7	Conclusiones prácticas	47
4	Seguimiento de canal en sistemas no lineales	49
4.1	Concepto e historia de la Teoría de Conjuntos Aleatorios	49
4.2	Incorporación de la Estadística de Conjuntos Finitos al seguimiento multiobjetivo	51
4.3	Las aportaciones de Biglieri <i>et al.</i>	52
5	Análisis del estado actual del problema	56
5.1	Crítica de la hipótesis de linealidad/gaussianidad	56
5.2	Crítica de RST: poca manejabilidad, coste computacional excesivo e hipótesis de certeza en los datos de partida . .	57
5.3	Necesidad de un nuevo enfoque	58
6	Simulación 1: Kalman monotrayecto	59
6.1	Modelo de Gauss-Markov lineal	59
6.1.1	Definición y breve explicación teórica	60
6.2	Filtro de Kalman para un solo trayecto	62

6.2.1	Particularización del modelo de planta: evolución de la ganancia de trayecto	62
6.2.2	Formulación del estimador de canal basado en datos	64
6.2.3	Particularización del modelo de observación . . .	66
6.2.4	Parámetros de la simulación monotrayecto	67
6.2.5	Ecuaciones que definen el filtro de Kalman para el seguimiento monotrayecto	68
6.2.5.1	Paso 1. Extrapolación de la varianza del error	69
6.2.5.2	Paso 2. Actualización de la estimación del estado	69
6.2.5.3	Paso 3: Actualización de la varianza del error	69
6.2.5.4	Paso 4. Cálculo de la estimación y recursión	70
6.2.6	Algoritmo de seguimiento implementado	70
6.2.7	Resultados	71
7	Simulación 2: Kalman multitrayecto	74
7.1	Modelo OFDM simplificado	74
7.2	Banco de filtros de Kalman	75
7.3	Resultados de la simulación	75
7.3.1	$\lambda_1 = 0,99$	75
7.3.2	$\lambda_2 = 0,9$	76
7.3.3	$\lambda_3 = 0,999$	78
8	Simulación 3: Sensibilidad a la no linealidad	80
8.1	Estructura de la simulación	81
8.2	Resultados	82
8.2.1	Prueba 1: λ_1 y $P_{birth} = P_{death}$	82
8.2.2	Prueba 2: λ_1 y $P_{birth} = 25\%$	83
8.2.3	Prueba 3: λ_2 y $P_{birth} = P_{death}$	85
8.2.4	Prueba 4: λ_2 y $P_{birth} = 25\%$	85
8.2.5	Prueba 5: λ_3 y $P_{birth} = P_{death}$	87
8.2.6	Prueba 6: λ_3 y $P_{birth} = 25\%$	89
8.2.7	Conclusiones	89

9 Simulación 4: Número fijo de trayectos	92
9.1 Antecedentes del problema	92
9.2 Objetivo y estructura de la simulación	93
9.3 Resultados y conclusión	93
10 Conclusiones	97
10.1 Revisión de objetivos	97
10.2 Perspectivas a explorar en trabajos futuros	99
10.2.1 Resolución <i>ad hoc</i> del problema no lineal	100
10.2.2 Elementos que aportan realismo adicional	100
10.2.3 Aleatorización adaptativa bajo incertidumbre del comportamiento estocástico del canal	101
10.2.4 Nacimiento y muerte paulatinos del canal	101
11 Presupuesto	102
11.1 Tareas y diagrama PERT	102
11.2 Presupuesto de costes	105
11.2.1 Costes materiales	105
11.2.2 Costes de personal	106
11.2.3 Costes totales	107
A Un modelo de canal multitrayecto basado en RST	114
A.1 Planteamiento del problema	114
A.2 Enfoque tradicional (previo a la aplicación de RST)	116
A.3 Enfoque basado en RST	116
A.4 Ventajas del modelo RST y posibles ampliaciones paramétricas	122

Lista de símbolos

General

Símbolo Descripción

$a, b, c \dots$	Elementos de algún conjunto.
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \dots$	Elementos aleatorios.
$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \dots$	Vectores en un espacio euclídeo \mathbb{R}^d .
$A, B, C \dots$	Conjuntos.
$A, B, C \dots$	Matrices.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$	Colecciones de conjuntos o colecciones.
$[a, b]$	Un intervalo real cerrado, $a \leq x \leq b$.
(a, b)	Un intervalo real abierto, $a < x < b$.
$[a, b)$	Un intervalo real semiabierto, $a \leq x < b$.
$[a, b, c]^T$	Un vector columna.
\underline{a}^T, A^T	La traspuesta de un vector \underline{a} , y una matriz A , respectivamente.
$a \in A$	a pertenece a A .
$A \subset B$	El conjunto A es un subconjunto (no necesariamente propio) del conjunto B .
$A \supset B$	El conjunto A es un superconjunto (no necesariamente propio) del conjunto B .
$A \setminus B$	La diferencia de conjuntos $A \cap \complement B$.
$\complement A$	El complemento de un conjunto A .

$ A $	La cardinalidad del conjunto A (esto es, el número de elementos que contiene).
$a \leftarrow b$	Se sustituye el valor de a por el valor b .
$n!$	El factorial de n , esto es, $\prod_{i=1}^n i$.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Los conjuntos de los números naturales (≥ 0), los números enteros, los números racionales, los números reales y los números complejos, respectivamente.
$\mathbf{x} \sim D$	La variable aleatoria \mathbf{x} tiene una distribución D .
$\int f(x) d\mu(x)$	La integral de una función f respecto de una medida μ .
$\int_A f(x) d\mu(x)$	La integral sobre un conjunto A .
$\int f(x) dx$	La integral de Riemann en \mathbb{R} .

Variables aleatorias

Símbolo Descripción

$c(a, b)$	La función de coste de Bayes de estimar b como a .
$\mathbb{E}[\mathbf{x}]$	La esperanza de una variable aleatoria \mathbf{x} .
$\mathbb{E}[\mathbf{x} \mathcal{G}]$	La esperanza condicional de una variable aleatoria \mathbf{x} dada una σ -álgebra generada por \mathcal{G} .
$\mathbb{E}[\mathbf{x} \mathbf{y}]$	La esperanza condicional de una variable aleatoria \mathbf{x} dado la σ -álgebra inducida por una variable aleatoria \mathbf{y} .
$\mathbb{E}[\mathbf{x} \mathbf{y}=y]$	La esperanza condicional de una variable aleatoria \mathbf{x} dado $\mathbf{y}=y$.
$h : \Omega \rightarrow X$	Una función h establece una aplicación entre valores de un conjunto origen Ω a un conjunto destino X .
$h : (\Omega, \mathcal{M}) \rightarrow (X, \mathcal{N})$	Una función medible h establece una aplicación entre valores de un espacio medible origen (Ω, \mathcal{M}) a un espacio medible destino (X, \mathcal{N}) .
P	La medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{M}) .

Comunicaciones

Símbolo Descripción

$c(a, b)$	La función de coste de Bayes de estimar b como a .
$\delta[k - l]$	La función delta de Kronecker.
\otimes	Operador de convolución cíclica.

Conjuntos aleatorios

Símbolo Descripción

$\int f(Z)\delta Z$	La integral de conjunto.
---------------------	--------------------------

Filtrado de Kalman

Símbolo Descripción

F	Matriz de coeficientes dinámicos.
G	Matriz de acoplamiento.
H	Matriz de sensibilidad de la medición.
K	Matriz de ganancia de Kalman.
P	Matriz de covarianzas de la incertidumbre en la estimación del estado.
Q	Matriz de covarianzas del ruido del proceso en la dinámica de estados del sistema.
R	Matriz de covarianzas de la incertidumbre observacional (de mediciones).
$\underline{\mathbf{x}}$	Vector (aleatorio) de estados de un sistema dinámico lineal.
$\underline{\mathbf{z}}$	Vector (aleatorio) de valores medidos.
Φ	Matriz de transición de estados de un sistema dinámico lineal discreto.
κ	Ganancia de Kalman escalar.
\mathbf{x}	Estado (aleatorio y escalar) de un sistema dinámico lineal.

$\underline{\mathbf{x}}_k$	El componente k-ésimo del vector aleatorio $\underline{\mathbf{x}}$.
$\underline{\mathbf{x}}_k$	El elemento k-ésimo de la secuencia ..., $\underline{\mathbf{x}}_{k-1}, \underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{x}}_{k+1}$, ..., de vectores aleatorios.
$\hat{\underline{\mathbf{x}}}$	Una estimación del valor de $\underline{\mathbf{x}}$.
$\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k(-)$	Una estimación <i>a priori</i> de $\underline{\mathbf{x}}_k$, condicionada por todas las mediciones anteriores salvo la del instante t_k .
$\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k(+)$	Una estimación <i>a posteriori</i> de $\underline{\mathbf{x}}_k$, condicionada por todas las mediciones anteriores salvo la del instante t_k .
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada de \mathbf{x} con respecto a t (el tiempo).
$\underline{\mathbf{w}}$	Ruido de proceso (vector $1 \times r$).
$\underline{\mathbf{z}}$	Medición (vector $1 \times l$).
$\underline{\mathbf{v}}$	Ruido de medición (vector $1 \times l$).
$\Delta(k-l)$	Función delta de Kronecker.

Acrónimos y abreviaturas

Abreviatura Descripción

4G	Comunicaciones móviles de cuarta generación
ADSL	Línea de abonado digital asimétrica (<i>Asymmetric Digital Subscriber Line</i>)
AR	Autorregresivo
AVE	Alta Velocidad Española
BEM	Modelo de expansión de bases (<i>Basis Expansion Model</i>)
BER	Tasa de error binario (<i>Bit Error Rate</i>)
BPSK	Modulación por desplazamiento en fase binaria (<i>Binary Phase Shift Keying</i>)
CP	Prefijo cíclico (<i>Cyclic Prefix</i>)
DB	Deutsche Bahn (la Renfe alemana)
DFT	Transformada de Fourier Discreta (<i>Discrete Fourier Transform</i>)
ETSI	European Telecommunications Standards Institute
KF	Filtro (o filtrado) de Kalman
FFT	Transformada de Fourier Rápida (<i>Fast Fourier Transform</i>)
FISST	Estadística de Conjuntos Finitos (<i>FInite Set STatistics</i>)
GML	Modelo de Gauss-Markov lineal
ICE	InterCity Express (trenes alemanes similares a los Alvia o AVE españoles)
ICI	Interferencia interportadora (<i>Inter-Carrier Interference</i>)

IDFT	Transformada de Fourier Discreta Inversa (<i>Inverse Discrete Fourier Transform</i>)
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IFFT	Transformada de Fourier Rápida Inversa (<i>Inverse Fast Fourier Transform</i>)
i. i. d.	independientes e idénticamente distribuidas
ISI	Interferencia intersimbólica (<i>Inter-Symbol Interference</i>)
LAN	Red de área local (<i>Local Area Network</i>)
LQE	Estimador lineal cuadrático (<i>Linear Quadratic Estimator</i>)
LQG	Lineal, cuadrático y gaussiano (<i>Linear Quadratic Gaussian</i>)
MIMO	Múltiples entradas y múltiples salidas (<i>Multiple Input, Multiple Output</i>)
MKF	Filtro de Kalman modificado (<i>Modified Kalman Filter</i>)
ML	Máxima verosimilitud (<i>Maximum Likelihood</i>)
MMSE	Error cuadrático medio mínimo (<i>Minimum Mean Square Error</i>)
MSE	Error cuadrático medio (<i>Mean Square Error</i>)
OFDM	Multiplexación por División en Frecuencias Ortogonales (<i>Orthogonal Frequency-Division Multiplexing</i>)
PFC	Proyecto de Fin de Carrera
PSAM	Modulación asistida por símbolos piloto (<i>Pilot Symbol Assisted Modulation</i>)
PSK	Modulación por desplazamiento de fase (<i>Phase Shift Keying</i>)BPSK
QAM	Modulación de amplitud en cuadratura (<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>)
QoS	Calidad de servicio (<i>Quality of Service</i>)
QRD	Descomposición QR (<i>QR Decomposition</i>)
RST	Teoría de Conjuntos Aleatorios (<i>Random Set Theory</i>)

SNR	Relación señal a ruido (<i>Signal-to-Noise Ratio</i>)
UMTS	Sistema universal de telecomunicaciones móviles (<i>Universal Mobile Telecommunications System</i>)
v. a.	variable aleatoria
WLAN	Red de área local inalámbrica (<i>Wireless Local Area Network</i>)

Capítulo 1

Estructura y objetivos del proyecto

1.1 Introducción

La multiplexación por división en frecuencias ortogonales (OFDM, de *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) constituye una técnica eficaz en la transmisión digital sometida a un severo desvanecimiento multitrayecto. Hace tiempo que resultaba atractiva, pero su implementación solo ha sido viable técnicamente y competitiva en costes a partir de avances recientes. Tanto el transmisor como el receptor se pueden implementar con procesamiento digital de señales¹ (DSP, de *Digital Signal Processing*) utilizando técnicas eficientes basadas en transformaciones de Fourier; en concreto, la Transformada de Fourier Rápida Inversa (IFFT, de *Inverse Fast Fourier Transform*) y la Transformada de Fourier Rápida (FFT, de *Fast Fourier Transform*) directa. OFDM permite un gran caudal de datos transmitidos y la posibilidad de maximizar su eficiencia adaptando sus variables al comportamiento del canal. Estas características hicieron que esta tecnología se convirtiera en una candidata perfecta para ciertos sistemas de comunicaciones móviles.

Por otro lado, las comunicaciones móviles, que siempre se han expandido siguiendo tres vectores o palabras clave (ubicuidad, capacidad y calidad), se han extendido en la última década a ámbitos, como los trenes de alta velocidad, que suponen tratar con canales de dinámicas nuevas y más complejas. OFDM ha funcionado bien en estos nuevos ámbitos. Por ejemplo, en Alemania, la Deutsche Bahn (similar a la Renfe española) creó su concepto de Mobility Net, con el objetivo de que los viajeros pudieran tener acceso a internet WLAN a lo largo de todo su recorrido de viaje,

¹El procesamiento digital de señales es la manipulación matemática de una señal de información para modificarla o mejorarla en algún sentido (por ejemplo, eliminar las distorsiones o el ruido introducidos por el canal de transmisión). Esta manipulación típicamente se realiza mediante secuencias de números o símbolos que representan la señal en dominios digitales, como el dominio del tiempo discreto o el dominio de la frecuencia discreta.



Figura 1.1: Vagón de primera clase de un ICE. El cartel rosa indica que hay internet gratuito.

con accesos inalámbricos tanto en las estaciones (Hot Spots) como en los trenes de alta velocidad ICE (Railnet). Para esta última tecnología, se aplicó una variante de OFDM: Flash-OFDM². También los ferrocarriles suecos iniciaron experiencias similares. A fecha de enero de 2013, según la propia empresa [DBW13], había 1.500 km de recorridos con cobertura Flash-OFDM para los usuarios de alta velocidad. En octubre de 2013, ya había más de 100 trenes de alta velocidad alemana con conexión a internet gratuita, a tasas similares a las de la línea de abonado digital asimétrica (ADSL, de *Asymmetric Digital Subscriber Line*) [DBM13].

Esta ampliación de las comunicaciones móviles ha supuesto toparse con nuevos desafíos, como tener que trabajar a velocidades muy altas (de hasta 300 km/h) y mantener la cobertura en túneles. Es en este contexto en el que resulta imprescindible hablar no solo de canales variantes en el tiempo, sino también de dinámicas de nacimiento y muerte de trayectos. La idea básica es que al cruzar un túnel, un valle o una cordillera, el entorno geográfico cambia tan rápidamente que cada vez uno recibe la señal por un conjunto distinto de trayectos. Saber modelar esto y

²En 2006, cuando empezaron las pruebas, la Deutsch Bahn utilizaba una combinación de UMTS y Flash-OFDM. Actualmente se utilizan los estándares 4G, 3G, 2G y 1G.

aprovechar la información sobre el comportamiento estocástico del multitrayecto permitirían grandes ahorros y una rápida y rentable ampliación de las comunicaciones móviles a nuevos ámbitos, como este claro ejemplo de la alta velocidad alemana pone de relieve³. En España, en febrero de 2015 se anunció un plan del Ministerio de Fomento y Renfe para que los usuarios de la Alta Velocidad Española (AVE) tuvieran acceso a internet, tanto en las estaciones como dentro de los trenes.

Independientemente de las tecnologías que finalmente se impongan, parece razonable pensar que en el futuro las comunicaciones móviles cada vez tendrán que abordar escenarios multitrayecto más complejos. De ahí se desprende la necesidad de estudiar, siguiendo el título de este Proyecto de Fin de Carrera (PFC), el “seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM”.

1.2 Contexto en el que surge el proyecto

Para la estimación y el seguimiento de canales en OFDM, se han propuesto diversos esquemas basados en el filtrado de Kalman (KF, de *Kalman Filtering*). El filtro de Kalman es un algoritmo de estimación óptimo para problemas lineales. Por consiguiente, el hecho de que se utilicen y que siguen surgiendo propuestas basadas en KF sugiere que la evolución de la ganancia de cada trayecto, dentro de un entorno multitrayecto OFDM, es suficientemente lenta como para poder modelarse, sin errores catastróficos, según una gaussiana. Es decir, hay implícita en estas propuestas una hipótesis de linealidad y gaussianidad⁴. Ahora bien, incluso si esta aproximación ha resultado útil en las aplicaciones que OFDM se ha encontrado mayormente hasta ahora, un futuro en el que las comunicaciones móviles se abran a aplicaciones diferentes (altas velocidades, geografía cambiante, etc. o bien entornos no tan agresivos, pero con tasas de datos más altas) requerirá tomar en consideración las no linealidades que tales aplicaciones conllevan.

En este sentido, trabajos como [ANG07, ANG09] criticaron el enfoque que reducía todo a lo lineal. En cuanto uno tiene en cuenta las no linealidades, según tales trabajos, incluso una estimación que minimice el error cuadrático medio (MMSE,

³El rápido despliegue de internet móvil en los trenes ICE tuvo una causa económica: según las encuestas de DB, los usuarios ponían “Internet en el tren” como uno de los aspectos más importantes a la hora de decantarse potencialmente por el tren. En Alemania, donde el tren ICE compite habitualmente con el automóvil en la mayoría de los recorridos, este factor, que permitiría vender el tiempo en el tren como “tiempo de trabajo” y no tiempo perdido conduciendo, resultaba muy ventajoso comercialmente. Para más información en español sobre este tema, el lector puede consultar: http://www.bahn.com/i/view/ESP/es/trains/overview/wi_fi.shtml

⁴Para ser más precisos, hay implícita una hipótesis de que la ganancia de trayecto evoluciona aproximadamente según un modelo de Gauss-Markov lineal (GML), como el que implementaremos en la simulación 1.

de *Minimum Mean Square Error*) sin KF resultaba más ventajosa que las propuestas basadas en filtrado de Kalman. Así, en ámbitos de nacimiento y muerte de trayectos, el problema seguía abierto. La única solución propuesta para abordar el problema desde la óptica de las no linealidades, la aplicación de la Teoría de Conjuntos Aleatorios (RST, de *Random Set Theory*), resultaba (y sigue resultando hoy) muy difícil de manejar y computacionalmente muy costosa.

En este contexto, nuestro trabajo pretende estudiar las no linealidades en OFDM, delimitando claramente el problema de nacimiento y muerte de trayectos, y calculando, mediante simulaciones, la degradación de los filtros de Kalman ante esta nueva dinámica.

1.3 Objetivos del proyecto

El objetivo del proyecto es **simular el seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM**, y, concretamente, simular el seguimiento, mediante bancos de filtros de Kalman, de canales sometidos a una dinámica de nacimiento y muerte de trayectos, dentro de un entorno OFDM. Esta simulación deberá realizarse bajo una serie de escenarios con distinta intensidad de la componente no lineal, para calibrar hasta qué punto de no linealidad el filtro de Kalman resiste con prestaciones aceptables. El análisis del seguimiento nos aportará información muy valiosa sobre las limitaciones de las técnicas actuales.

Para la consecución del objetivo anteriormente expuesto será necesario realizar las siguientes tareas u **objetivos secundarios**:

- **Analizar y definir el modelo OFDM y los modelos de evolución de ganancia de trayecto que se utilizarán en el sistema.** Partiendo de un modelo general de OFDM, realizaremos una simplificación adaptada a los fines de este proyecto y plantearemos un diseño de implementación. De manera análoga, estudiaremos el modelo de Gauss-Markov lineal (GML) para aplicarlo como generador de ganancias de trayecto.
- **Analizar el filtrado de Kalman y definir un algoritmo de estimación basado en filtrado de Kalman** para realizar el seguimiento de trayectos que sigan una evolución de Gauss-Markov lineal, tanto para el caso monotrayecto como para el caso multitrayecto/OFDM.
- **Implementar una simulación de un seguimiento monotrayecto** en el que la ganancia de canal evolucione según un modelo de Gauss-Markov lineal

y la estimación se realice mediante un filtro de Kalman. A lo largo de este trabajo, nos referiremos a esta tarea como la simulación 1.

- **Implementar una simulación de un seguimiento multitrayecto** en el que cada ganancia de canal evolucione **según un modelo de Gauss-Markov** lineal y la estimación se realice mediante un banco de filtros de Kalman. A lo largo de este trabajo, nos referiremos a esta tarea como la simulación 2.
- **Analizar y definir un modelo de comportamiento estocástico de nacimiento y muerte de trayectos.** Este modelo introducirá una no linealidad en la simulación 3.
- **Implementar una simulación de un seguimiento multitrayecto** en el que cada ganancia de canal evolucione no solo según un modelo lineal-gaussiano, sino también **según una componente no lineal** de nacimiento y muerte de trayectos; la simulación incluirá un cómputo de las prestaciones reductoras del error cuadrático medio que presenta el filtro de Kalman para una larga serie de valores de intensidad de la no linealidad (asociados a los parámetros P_{birth} y P_{death} , probabilidades de nacimiento y muerte de trayecto, respectivamente). A lo largo de este trabajo, nos referiremos a esta tarea como la simulación 3.
- **Implementar una simulación de un seguimiento multitrayecto en el que el número de trayectos activos sea constante** pero inferior al previsto (inferior a la dimensión del banco de filtros). De esta manera, podremos calibrar hasta qué punto es diferente este escenario del seguimiento multitrayecto con una componente no lineal de nacimiento y muerte de trayectos. A lo largo de este trabajo, nos referiremos a esta tarea como la simulación 4.

1.4 Estructura del documento

El presente documento consta de once capítulos cuyos contenidos esbozaremos en esta sección para una mejor comprensión de la estructura del PFC.

El capítulo 1, “Estructura y objetivos del proyecto”, presenta el trabajo realizado a modo introductorio y especifica los objetivos del PFC. Le sigue un primer bloque, formado por los capítulos 2, 3, 4 y 5, que presentan distintas tecnologías y antecedentes a este proyecto, exponiendo el estado del arte en torno a la problemática que nos ocupa y terminando con una breve exposición crítica de dónde estamos y hacia dónde podríamos ir. Posteriormente hay un segundo bloque, formado por los

capítulos 6, 7, 8 y 9, donde se presentan las distintas simulaciones que conforman el PFC. En el capítulo 10 se extraen las conclusiones del PFC y se proponen posibles trabajos futuros. El capítulo 11 es el presupuesto.

A continuación describimos con más detalle los capítulos de los dos bloques centrales.

1.4.1 Bloque teórico (capítulos 2 a 5)

El capítulo 2, “OFDM y modelos de canal”, explica la tecnología OFDM y presenta varios modelos de canal con los que se podría trabajar para realizar las simulaciones que componen este proyecto.

El capítulo 3, “Filtro de Kalman”, explica, primero de manera intuitiva y fácil de comprender y, posteriormente, con ecuaciones más detalladas, todo el proceso de la estimación mediante filtrado de Kalman; el capítulo se completa con una revisión somera de las propuestas sobre filtrado de Kalman que se han publicado en la literatura técnica como alternativas para la estimación y el seguimiento de canales en comunicaciones OFDM.

El capítulo 4, “Seguimiento de canal en sistemas no lineales”, habla brevemente del estado en el que se encuentra el modelo y el análisis de entornos con dinámica de nacimiento y muerte de trayectos, así como de su principal solución en este momento: aplicar la Teoría de Conjuntos Finitos Aleatorios. Dentro de ese capítulo se explica la historia de la Teoría de Conjuntos Aleatorios (RST), cómo se aplicó primero a seguimiento multiobjetivo (principalmente en aplicaciones militares, detección de radar, etc.) y, muy recientemente, también al problema del nacimiento y muerte de trayectos en OFDM sencillo y OFDM de múltiples entradas y salidas (MIMO-OFDM, de *Multiple Input, Multiple Output-Orthogonal Frequency Division Multiplexing*). Se ha adjuntado como Apéndice A, “Un modelo de canal multi-trayecto basado en RST”, una exposición detallada de cómo aplicar RST al seguimiento multitrayecto.

Finalmente, en el capítulo 5, “Análisis del estado actual del problema”, se reflexiona acerca de los límites de las tecnologías actuales para abordar la casuística de nacimiento y muerte de trayectos.

1.4.2 Bloque de simulaciones (capítulos 6 a 9)

El capítulo 6, “Simulación 1: Kalman monotrayecto” describe el modelo de Gauss-Markov lineal que se utilizará en las simulaciones, así como el filtro de Kalman monotrayecto. Se hace una exposición detallada de los parámetros elegidos (con

los cálculos pertinentes), se presenta el pseudocódigo y, finalmente, se muestran los resultados de la simulación 1.

El capítulo 7, “Simulación 2: Kalman multitrayecto” presenta un modelo OFDM simplificado y un banco de filtros de Kalman para seguimiento multitrayecto. Finalmente, se muestran los resultados de la simulación 2.

En el capítulo 8, “Simulación 3: Sensibilidad a la no linealidad”, se introduce una dinámica de nacimiento y muerte de trayectos y, para tratar de responder a la pregunta: “¿Cuándo degenera el rendimiento del filtro de Kalman?”, se muestran los resultados de la simulación 3, incluyendo un cuadro con las prestaciones del banco de filtros de Kalman para distintas intensidades de no linealidad.

En el capítulo 9, “Simulación 4: Número fijo de trayectos”, completamos nuestra investigación ofreciendo una prueba contundente, en forma de contraejemplo, para negar la idea de que una componente no lineal como la dinámica de nacimiento y muerte de trayectos pudiera ser equivalente a un escenario con un número de trayectos fijo, pero menor al esperado. Se presentan resultados que muestran que, en realidad, cuando el número de trayectos es fijo apenas hay degradación de las prestaciones del filtro de Kalman.

Capítulo 2

OFDM y modelos de canal

La multiplexación por división en frecuencias ortogonales (OFDM, de *Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*) constituye un método de modulación de los datos digitales sobre múltiples frecuencias portadoras. OFDM se ha convertido en un sistema popular para la comunicación digital de banda ancha, utilizada en aplicaciones como la televisión digital, la difusión de audio digital, el acceso a internet mediante línea de abonado digital asimétrica (ADSL, de *Asymmetric Digital Subscriber Line*), las redes inalámbricas, las redes de comunicaciones por cables eléctricos convencionales (*Powerline Communications*) y las comunicaciones móviles de cuarta generación (4G).

2.1 Explicación básica de OFDM

OFDM es una técnica de multiplexación por división en frecuencia utilizada como método de modulación multiportadora digital. En esta técnica, se utiliza un gran número de señales subportadoras ortogonales, con un pequeño distanciamiento entre ellas, para transmitir los datos en varios flujos de datos paralelos (a veces llamados canales).

En ese sentido, dos imágenes podrían describir la diferencia entre un sistema OFDM y el sistema de comunicación simple tradicional. Como se observa en la figura 2.1, si la comunicación tradicional se ha realizado con una sola señal portadora que llevara toda la información (asemejándose al chorro único y caudaloso de un grifo), un sistema OFDM se parece más a los múltiples chorros finos producidos por la alcachofa o cabezal difusor de una ducha. A la hora de comparar modelos, hay que partir de que el caudal del grifo y de la ducha son aproximadamente idénticos, aunque en el caso de la ducha/OFDM esté dividido en varios chorritos/subportadoras.

Cada subportadora se modula con un sistema de modulación convencional, como



Figura 2.1: El chorro único de un grifo frente a los múltiples chorros, más finos, de una ducha

modulación de amplitud en cuadratura (QAM, de *Quadrature Amplitude Modulation*), o modulación por desplazamiento de fase (PSK, de *Phase Shift Keying*), a una baja tasa de símbolos (lo que no impide que el caudal total de la ducha sea igual o similar al del grifo).

La principal ventaja de OFDM respecto de los sistemas monoportadora es su capacidad de resistir canales con condiciones muy difíciles (por ejemplo, la atenuación de altas frecuencias en un conductor de cobre de gran longitud, la interferencia en banda estrecha y el desvanecimiento selectivo en frecuencia debido al carácter multitrayecto del canal) sin filtros de igualación complejos. La igualación de canal se simplifica porque OFDM se puede considerar como la utilización de múltiples señales de banda estrecha con una modulación lenta en vez de una señal de banda ancha con una modulación rápida. La baja tasa de símbolos hace viable la utilización de un intervalo de guarda entre símbolos, lo que permite eliminar la interferencia intersimbólica (ISI, de *InterSymbol Interference*) y utilizar ecos y ensanchamiento en tiempo para obtener una ganancia de diversidad, esto es, una mejora en la relación señal a ruido (SNR, de *Signal-to-Noise Ratio*). Este mecanismo también facilita el diseño de redes de una sola frecuencia en las cuales varios transmisores adyacentes envían la misma señal simultáneamente a la misma frecuencia, dado que las señales de múltiples transmisores distantes se pueden combinar de manera constructiva, en vez de interferir como ocurriría típicamente en el caso de un sistema tradicional monoportadora. En este sentido, OFDM se puede combinar con otras formas de diversidad espacial, por ejemplo, arrays de antenas y canales MIMO, como se realiza en el estándar de LAN inalámbrica IEEE802.11.

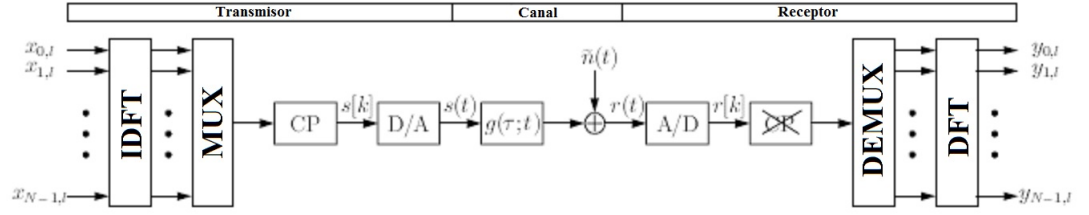


Figura 2.2: Implementación digital de un sistema OFDM en banda base

2.2 Modelado genérico de sistemas OFDM

La idea que subyace a OFDM es dividir el espectro disponible en varios subcanales. Al tener canales de banda estrecha, cada uno de ellos se enfrenta a un desvanecimiento plano, lo cual facilita la ecualización. Para obtener una eficiencia espectral alta, la respuesta en frecuencia de los subcanales¹ es tal que, en frecuencia, son ortogonales (de ahí el nombre: OFDM). Esto significa que, en la frecuencia en la que un subcanal alcanza el máximo, los subcanales adyacentes alcanzan un mínimo.

Vamos a abordar el modelado genérico de los sistemas OFDM primero de manera continua y, posteriormente, en tiempo discreto.

Partiremos de una serie de suposiciones:

- Se utiliza un prefijo cíclico (CP, de *Cyclic Prefix*).
- La respuesta impulsiva del canal es menor que la longitud del CP.
- El transmisor y el receptor están perfectamente sincronizados.
- El ruido del canal es blanco, aditivo y gaussiano.
- El desvanecimiento es lo suficientemente lento como para considerarlo constante durante el intervalo de un símbolo OFDM².

El sistema de la figura 2.2, que implementa digitalmente OFDM en banda base, permite la transmisión en paralelo de un conjunto de N símbolos M -arios. Tales símbolos se habrían podido formar a partir del flujo de datos (que se puede simular como un flujo binario aleatorio).

¹Hablaremos indistintamente de subcanales, canales o subportadoras, para referirnos a las divisiones del ancho de banda utilizado.

²Esto no es así; en realidad, la estimación de canal es más precisa para el principio del símbolo OFDM que para el final, pero es una aproximación habitual considerar constante el desvanecimiento en un primer enfoque al problema.

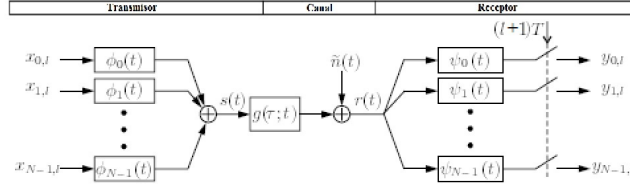


Figura 2.3: Modelo de sistema OFDM en banda base.

Tras lo que se conoce como *mapper* en la literatura inglesa (que se podría traducir como aplicador), el flujo binario (M -PSK o M -QAM) se convierte de serie a paralelo, con lo cual se tiene un conjunto de N números complejos x_k .

Así pues, los datos x_k son modulados sobre N portadoras mediante la aplicación de la Transformada de Fourier Discreta Inversa (IDFT), de manera que se obtienen los valores complejos a_k . Esta señal entra a un serializador que copia las últimas L muestras a modo de preámbulo o prefijo cíclico³. El resultado es el símbolo OFDM a transmitir.

En el receptor, se siguen los pasos en sentido inverso. Así pues, primero se extrae la extensión cíclica, luego se desmodula la señal resultante aplicando la Transformada de Fourier Discreta (DFT).

Realizar un análisis teórico completo de un sistema OFDM es muy difícil. Resulta más sencillo utilizar modelos simplificados que nos permitan un análisis más simple sin gran pérdida de resolución. Se suelen clasificar los modelos simplificados según si son de tiempo continuo o de tiempo discreto.

2.3 Modelo en tiempo continuo

Estudiemos el caso OFDM ideal, esto es, un OFDM continuo que no emplea modulación ni desmodulación⁴. Vamos a analizarlo paso por caso, empezando por las formas de onda utilizadas en el transmisor y moviéndonos módulo a módulo hasta el receptor. El modelo de banda base se muestra en la figura 2.3.

Antes de empezar, formalicemos el concepto de ortogonalidad. Supongamos que tenemos un conjunto de señales ϕ , donde ϕ_p es el p -ésimo elemento. Se dice que las señales son ortogonales si su integral a lo largo de un periodo cumple:

³La inserción del prefijo cíclico se acepta comúnmente con el fin de evitar ISI y preservar la ortogonalidad entre los subcanales.

⁴Ese es el enfoque de [EDF96b], que seguimos estrechamente en este apartado.

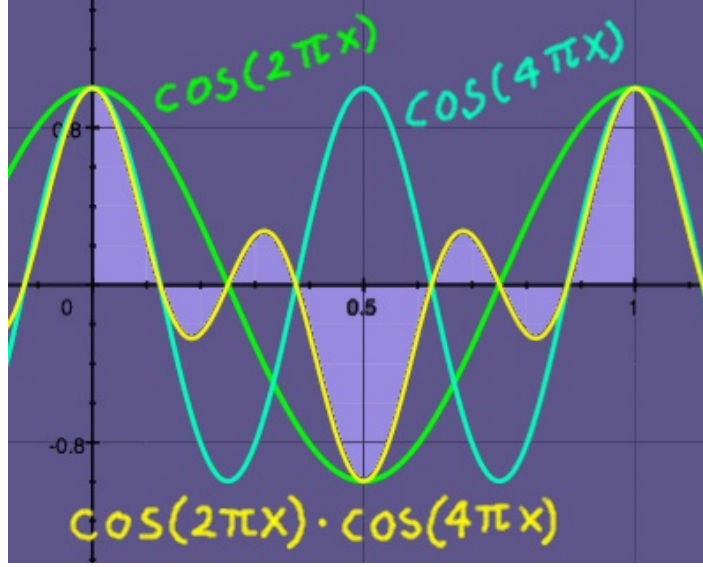


Figura 2.4: Dos señales ortogonales, $\cos(2\pi x)$ y $\cos(4\pi x)$, y su producto, cuya integral a lo largo del periodo fundamental es nula, como se demuestra gráficamente.

$$\int_a^b \phi_p(t) \phi_q^*(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases} \quad (2.1)$$

Algunos ejemplos típicos de señales ortogonales son combinaciones de senos y cosenos. En la figura 2.4 se muestra un par de señales ortogonales con la demostración gráfica de su ortogonalidad.

Una vez aclarado el concepto de ortogonalidad, analicemos cómo se transforman las señales a lo largo de cada etapa del modelo continuo del sistema OFDM.

2.3.1 Transmisor

Si suponemos un sistema OFDM con N subportadoras, un ancho de banda de W Hz y una longitud de símbolo de T segundos, de los cuales T_{cp} es la longitud del prefijo cíclico, el transmisor utiliza las formas de onda que se indican en la siguiente ecuación:

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} e^{j2\pi \frac{W}{N} k(t-T_{cp})} & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $T = N/W + T_{cp}$. Obsérvese que $\phi_k(t) = \phi_k(t + N/W)$ donde t se encuentra dentro del prefijo cíclico $[0, T_{cp}]$. Dado que $\phi_k(t)$ es un pulso rectangular modulado en la frecuencia portadora kW/N , la interpretación usual de OFDM dice que utiliza N subportadoras, y que cada una de estas transmite una baja tasa de bits. Las formas

de onda $\phi_k(t)$ se utilizan en la modulación y la señal de banda base transmitida para el número de símbolo OFDM l es

$$s_l(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t - lT) \quad (2.3)$$

donde $x_{0,l}, x_{1,l}, \dots, x_{N-1,l}$ son números complejos de un conjunto de puntos de constelación de la señal. Cuando se transmite una secuencia infinita de símbolos OFDM, la salida del transmisor es una yuxtaposición de símbolos OFDM individuales:

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} s_l(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t - lT) \quad (2.4)$$

2.3.2 Canal físico

Si suponemos que el soporte de la respuesta impulsiva⁵ $g(\tau; t)$ del canal físico está restringido al intervalo $\tau \in [0, T_{cp}]$, esto es, a la longitud del prefijo cíclico, la señal recibida pasa a ser:

$$r(t) = (g * s)(t) = \int_0^{T_{cp}} g(\tau; t) s(t - \tau) d\tau + \tilde{n}(t) \quad (2.5)$$

donde $\tilde{n}(t)$ es un ruido de canal aditivo, blanco, gaussiano y complejo.

2.3.3 Receptor

El receptor OFDM está compuesto por un banco de filtros, adaptado a la última parte $[T_{cp}, T]$ de las formas de onda $\phi_k(t)$ del transmisor, esto es,

$$\psi_k(t) = \begin{cases} \phi_k^*(T - t) & \text{si } t \in [0, T - T_{cp}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.6)$$

Efectivamente, esto significa que en el receptor se elimina el prefijo cíclico. Dado que el prefijo cíclico contiene toda la ISI del símbolo anterior, la salida muestreada del banco de filtros del receptor no contiene ninguna ISI. Por consiguiente, podemos ignorar el índice de tiempo l al calcular la salida muestreada del filtro adaptado k -ésimo. A partir de las igualdades (2.4), (2.5) y (2.6), obtenemos

⁵La respuesta impulsiva podría ser variante con el tiempo.

$$\begin{aligned}
y_k &= (r * \psi_k)(t)|_{t=T} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\psi_k(T-t)dt = \\
&= \int_{T_{cp}}^T \left(\int_0^{T_{cp}} g(\tau; t) \left[\sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} \phi_{k'}(t-\tau) \right] d\tau \right) \phi_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Aquí incorporamos la aproximación de que el canal es fijo a lo largo del intervalo de un símbolo OFDM, y lo denotamos con $g(\tau)$, lo cual nos da:

$$y_k = \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} \int_{T_{cp}}^T \left(\int_0^{T_{cp}} g(\tau) \phi_{k'}(t-\tau) d\tau \right) \phi_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt \quad (2.8)$$

Los intervalos de integración son $T_{cp} < t < T$ y $0 < \tau < T_{cp}$, lo cual implica que $0 < t - \tau < T$ y la integral interior se puede escribir como:

$$\int_0^{T_{cp}} g(\tau) \phi_{k'}(t-\tau) d\tau = \int_0^{T_{cp}} g(\tau) \frac{e^{j2\pi k'(t-\tau-T_{cp})W/N}}{\sqrt{T-T_{cp}}} d\tau = \frac{e^{j2\pi k'(t-T_{cp})W/N}}{\sqrt{T-T_{cp}}} \int_0^{T_{cp}} g(\tau) e^{-j2\pi k'\tau W/N} d\tau \quad (2.9)$$

siendo $T_{cp} < t < T$. La última parte de la expresión (2.9) es la respuesta en frecuencia del canal, muestreada a la frecuencia $f = k'W/N$, esto es, en la frecuencia de la subportadora k' -ésima:

$$h_{k'} = G(k' \frac{W}{N}) = \int_0^{T_{cp}} g(\tau) e^{-j2\pi k'\tau W/N} d\tau \quad (2.10)$$

donde $G(f)$ es la transformada de Fourier de $g(\tau)$. Utilizando esta notación, y siguiendo en todo momento el desarrollo presentado en [EDF96b], la salida del banco de filtros del receptor se puede simplificar a:

$$y_k = \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} \frac{e^{j2\pi k'(t-T_{cp})W/N}}{\sqrt{T-T_{cp}}} h_{k'} \phi_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt = \sum_{k'=0}^{N-1} x_{k'} h_{k'} \int_{T_{cp}}^T \phi_{k'}(t) \phi_k^*(t) dt + n_k \quad (2.11)$$

donde $n_k = \int_{T_{cp}}^T \tilde{n}(T-t) \phi_k^*(t) dt$. Dado que los filtros $\phi_k(t)$ del transmisor son

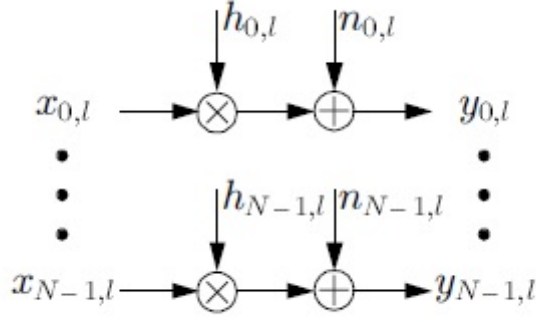


Figura 2.5: El sistema OFDM de tiempo continuo, interpretado como canales gaussianos paralelos.

ortogonales⁶,

$$\int_{T_{cp}}^T \phi_{k'}(t) \phi_k^*(t) dt = \int_{T_{cp}}^T \frac{e^{j2\pi k'(t-T_{cp})W/N}}{\sqrt{T-T_{cp}}} \frac{e^{-j2\pi k(t-T_{cp})W/N}}{\sqrt{T-T_{cp}}} dt = \delta[k-k'] \quad (2.12)$$

donde $\delta[k]$ es la función delta de Kronecker [OPP89], podemos simplificar la ecuación (2.12) para obtener:

$$y_k = h_k x_k + n_k \quad (2.13)$$

donde n_k es ruido aditivo blanco gaussiano.

La ventaja de un prefijo cíclico es doble: evita el ISI (ya que actúa como espacio de guarda) y el ICI (dado que mantiene la ortogonalidad de las subportadoras). Si reintroducimos el índice de tiempo l , ahora podemos ver el sistema OFDM como un conjunto de canales gaussianos paralelos, de conformidad con la figura 2.5.

2.4 Modelo de tiempo discreto

Otra forma de abordar el modelado (simplificado) de un sistema OFDM es considerando todas sus etapas en tiempo discreto. A diferencia del modelo de tiempo continuo, la modulación y la desmodulación son sustituidas por transformadas discretas (IDFT y DFT) y el efecto del canal se calculará mediante una convolución en tiempo discreto. El prefijo cíclico opera de la misma manera en este sistema y los cálculos se pueden realizar de manera análoga. La principal diferencia es que todas

⁶Para la definición de ortogonalidad, véase la ecuación (2.1).

las integrales se sustituyen por sumatorios.

En la figura (2.5), se muestra un modelo de sistema OFDM en tiempo discreto.

Desde el punto de vista del receptor, utilizar un prefijo cíclico más largo que el canal transformará la convolución lineal del canal en una convolución cíclica. Si utilizamos el símbolo “ \otimes ” para denotar la convolución cíclica, podemos escribir todo el sistema OFDM como:

$$\underline{\mathbf{y}}_l = \text{DFT}(\text{IDFT}(\underline{\mathbf{x}}_l) \otimes \underline{\mathbf{g}}_l + \underline{\mathbf{n}}_l) = \text{DFT}(\text{IDFT}(\underline{\mathbf{x}}_l) \otimes \underline{\mathbf{g}}_l) + \underline{\mathbf{n}}_l \quad (2.14)$$

donde $\underline{\mathbf{y}}_l$ contiene los N puntos de datos recibidos, $\underline{\mathbf{x}}_l$ los N puntos transmitidos de la constelación, $\underline{\mathbf{g}}_l$ la respuesta impulsiva del canal (rellenada con ceros para obtener una longitud de N), y $\underline{\mathbf{n}}_l$ el ruido del canal. Dado que el ruido de canal se asume blanco y gaussiano, el término $\underline{\mathbf{n}}_l = \text{DFT}(\tilde{\mathbf{n}}_l)$ representa ruido gaussiano incorrelacionado. Además, podemos aprovechar el resultado de que la DFT de dos señales a las que se aplica una convolución cíclica es equivalente al producto de sus distintas DFTs. Denotando la multiplicación elemento a elemento por “ \cdot ”, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\underline{\mathbf{y}}_l = \underline{\mathbf{x}}_l \cdot \text{DFT}(\underline{\mathbf{g}}_l) + \underline{\mathbf{n}}_l = \underline{\mathbf{x}}_l \cdot \underline{\mathbf{h}}_l + \underline{\mathbf{n}}_l \quad (2.15)$$

donde $\underline{\mathbf{h}}_l = \text{DFT}(\underline{\mathbf{g}}_l)$ es la respuesta en frecuencia del canal. Así, la ecuación anterior representa el mismo tipo de canales gaussianos paralelos que el obtenido en el apartado anterior para el modelo en tiempo continuo. La única diferencia es que las atenuaciones de canal $\underline{\mathbf{h}}_l$ vienen dadas por la DFT de N puntos del canal en tiempo discreto, en lugar de la respuesta en frecuencia muestreada que aparecía en (2.10).

2.5 Modelo empleado para las simulaciones

En la actualidad, la modulación y la desmodulación digitales, así como la facilidad de simulación con algoritmos basados en matrices (como los del programa MATLAB), hacen que la utilización del modelo en tiempo digital sea la solución idónea para simulaciones de sistemas OFDM. En este proyecto, hemos empleado un modelo similar al discutido anteriormente, pero algunas simplificaciones más que nos permitieran enfocar más de cerca los aspectos clave a testear.

Así, hemos prescindido de la utilización de canales y señales complejos en favor de valores reales, sin que eso suponga una pérdida significativa de precisión en nuestros resultados. También hemos obviado la emisión de datos verdaderos para realizar

todas nuestras pruebas con secuencias de entrenamiento (es decir, los únicos datos enviados son secuencias de entrenamiento). Este tipo de simplificaciones, así como el diseño del estimador en recepción y otros aspectos del sistema, se detallan en el apartado 7.1, “Modelo OFDM simplificado”.

Capítulo 3

Filtro de Kalman

3.1 ¿Qué es el filtro de Kalman?

El filtro de Kalman (KF), también conocido como estimación lineal cuadrática (LQE, de *Linear Quadratic Estimator*) es un estimador estadísticamente óptimo para el problema lineal cuadrático, esto es, para estimar el estado instantáneo de un sistema dinámico lineal con una función de coste cuadrática¹, mediante la utilización de mediciones relacionadas linealmente con el estado pero corrompidas por ruido blanco.

Se trata de uno de los mayores descubrimientos en la historia de la teoría de la estimación estadística y, posiblemente, el descubrimiento más importante del siglo XX en este campo [AND01]. Es una herramienta matemática, implementable como programa informático, que constituye una caracterización estadística completa de un problema de estimación.

Por tanto, a nivel práctico no se trata solo de un estimador, ya que propaga toda la distribución de probabilidad de las variables que tiene que estimar; en otras palabras, caracteriza completamente el estado de conocimiento actual del sistema dinámico, incluida la influencia de todas las mediciones pasadas.

Fue presentado por primera vez en [KAL60] por Rudolf E. Kálmán², quien es considerado uno de los principales desarrolladores de la teoría subyacente, y pronto este invento se popularizó entre las facultades de ingeniería [AND01].

¹El problema de estimación típico es lineal, cuadrático y gaussiano (LQG, de *Linear Quadratic Gaussian*). En ese caso, los sistemas dinámicos son lineales, las funciones de coste aplicadas a la calidad de la estimación son cuadráticas y, como condición añadida, los procesos aleatorios son gaussianos.

²Kálmán nació en Hungría; la forma correcta de escribir este apellido húngaro es con dos acentos. Para referirnos al filtro de Kalman, utilizaremos la versión anglizada (sin acentos) del apellido, por ser la más habitual en la literatura técnica.

3.1.1 Aplicaciones y breve descripción del algoritmo

El filtro de Kalman tiene numerosas aplicaciones en la tecnología. Una aplicación común es para el guiado, la navegación y el control de vehículos, concretamente de aviones y naves espaciales. Otro uso frecuente tiene como finalidad la detección de blancos en aplicaciones radar. Además, el filtro de Kalman es un concepto ampliamente aplicado en el análisis de series temporales, tal y como se utiliza en campos como el procesamiento de la señal y la econometría. Los filtros de Kalman también suponen uno de los principales temas de la planificación y el control de movimientos robóticos y, a veces, son incluidos en los algoritmos de optimización de trayectorias.

El algoritmo funciona en un proceso de dos etapas: una predictiva y otra de actualización. En la etapa predictiva, el filtro de Kalman produce estimaciones de las actuales variables de estado, así como sus incertidumbres. Una vez que se ha obtenido la siguiente medición (necesariamente corrompida con cierto error o ruido aleatorio), estas estimaciones se actualizan utilizando una media ponderada, dándose más peso a las estimaciones con mayor certidumbre. Debido a la naturaleza recursiva del algoritmo, puede funcionar en tiempo real utilizando solamente las mediciones actuales de entrada y el estado calculado anteriormente y su matriz de incertidumbre; no necesita ninguna información adicional del pasado.

El modelo subyacente es un modelo bayesiano similar al modelo oculto de Markov³.

A continuación, se intentará explicar todo esto de forma muy sencilla.

3.1.2 Explicación simplificada de la ecuación básica

Las ecuaciones desde las que se parte en los manuales sobre filtrado Kalman son excesivamente complejas para una primera explicación; afortunadamente, a menudo (y desde luego, en el caso en el que nos concierne en este PFC), la matriz de transición de estados desaparece y se puede alcanzar la siguiente ecuación, mucho más fácil, con la que empezar:

$$\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k(+) = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{K}}_k)\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k(-) + \bar{\mathbf{K}}_k\mathbf{z}_k \quad (3.1)$$

siendo

$\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k(+)$ La estimación de la señal $\underline{\mathbf{x}}$ en el instante t_k tras incorporar la información de la nueva lectura (esto es, la estimación *a posteriori* o condicionada por la lectura \mathbf{z}_k). Está representada por un vector aleatorio de

³La transliteración correcta del apellido ruso Мάρков al español es Márkov, señalando el acento. Al referirnos a los modelos desarrollados por Márkov, utilizaremos la versión anglizada y sin acento del apellido (Markov), por ser la más habitual en la literatura técnica.

dimensiones $n \times 1$.

\bar{K}_k	La matriz de ganancia de Kalman en el instante t_k , con dimensiones $n \times l$.
I	La matriz identidad
$\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k(-)$	La estimación de la señal $\underline{\mathbf{x}}$ en el instante t_k antes de incorporar la información de la nueva lectura (esto es, la estimación <i>a priori</i> , no condicionada por la lectura $\underline{\mathbf{z}}_k$). Está representada por un vector aleatorio de dimensiones $n \times 1$.
$\underline{\mathbf{z}}_k$	La lectura o medición obtenida en el instante t_k , representada como un vector aleatorio $l \times 1$.

Recuérdese que los subíndices k y $k - 1$ hacen referencia al instante. Por ejemplo, en nuestro caso, se tratará de intervalos de tiempo discretos, de manera que $t_k = t_{k-1} + \tau$, para toda $k > 0$ y un determinado intervalo de tiempo τ .

Aunque las variables en la ecuación (3.1) son vectores aleatorios y matrices, son frecuentes las situaciones en las que hay que estimar valores escalares sobre la base de mediciones con valores escalares. En concreto, ese será nuestro caso en este PFC. Recuérdese que, en este proyecto, la notación en negrita indica aleatoriedad y el subrayado indica que el elemento es un vector (como $\underline{\mathbf{z}}_k$), y la mayúscula y sin cursiva (como \bar{K}_k) denotan matrices⁴. Para obtener la forma escalar de la ecuación (3.1), utilizaremos las correspondientes variables sin subrayado y en cursiva, como \mathbf{z}_k y $\bar{\kappa}_k$ ⁵, para escribir:

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+) = (1 - \bar{\kappa}_k) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k(-) + \bar{\kappa}_k \cdot \mathbf{z}_k \quad (3.2)$$

Nuestro objetivo consiste en encontrar $\hat{\mathbf{x}}_k(+)$, la estima actualizada de la “señal”⁶ \mathbf{x}_k . Además, el algoritmo puede aplicarse en línea (*online*), esto es, encontrando re-

⁴Para cualquier duda sobre notación, se puede consultar la extensa “Lista de símbolos” de la página 7 y, en particular, la sección “Filtrado de Kalman”.

⁵No hay que confundir la letra latina k y la letra griega kappa (κ). El símbolo \bar{K} que denota la ganancia de Kalman matricial es la kappa mayúscula (con una raya encima). Por tanto, la ganancia de Kalman escalar siempre será $\bar{\kappa}$ (kappa minúscula con raya encima). En este PFC, para evitar confusiones, \bar{K} nunca se utilizará con otro significado. La notación de la raya encima se emplea exclusivamente por ser habitual en la literatura, siendo utilizada p. ej. en [AND79, BRO97, CAT89, GEL74].

⁶En rigor, lo que estamos estimando puede ser cualquier magnitud, p. ej. velocidad, posición dentro de un mapa, altura y posición de un avión o, como será nuestro caso y veremos más adelante, la ganancia de un trayecto dentro de un canal para OFDM. En Teoría de la Estimación, la naturaleza física de la magnitud no se considera, sino solo su naturaleza matemática: a efectos de nomenclatura, todo son “señales”. Nuestro desconocimiento sobre la señal se representa matemáticamente como aleatoriedad de la señal, de ahí la notación de \mathbf{x}_k en negrita.

cursivamente la estimación para cada instante posterior (es decir, la estimación del estado en el instante k -ésimo para cada k posterior). Téngase en cuenta que \mathbf{z}_k es el valor de la medición, pero la medición no es perfectamente precisa ni está perfectamente libre de distorsiones (de lo contrario, no necesitaríamos el filtro de Kalman). El valor de medición típicamente se distribuye asumiendo un error gaussiano. También nos es conocida $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$, a menudo llamada estimación *a priori*; en realidad, se trata de la predicción de la señal calculada en el instante anterior.

Por tanto, de la expresión a la derecha de la igualdad en la ecuación (3.2), el único componente desconocido es la ganancia de Kalman, $\bar{\kappa}_k$. El filtro de Kalman necesita calcular la ganancia de Kalman que es, para entendernos, la fiabilidad que le concede el filtro a cada una de sus fuentes de información: una fuente de información sería la medida (esto es, las lecturas que va recibiendo en cada instante), y otra fuente de información sería el modelo teórico subyacente (p. ej. la ecuación que teóricamente regiría sobre una magnitud a estimar, como la velocidad o, en nuestro caso concreto, la ganancia de un trayecto en un canal multitrayecto).

Para comprender mejor cómo funciona el filtro de Kalman, basta con pensar qué sucedería si suponemos que utilizamos, como condición inicial: $\bar{\kappa}_k = 0,5$. En tal caso, la ecuación escalar (3.2) tomaría la siguiente forma trivial:

$$\hat{\mathbf{x}}_k(+)=0,5 \cdot \hat{\mathbf{x}}_k(-) + 0,5 \cdot \mathbf{z}_k \quad (3.3)$$

Esto es, la estimación de \mathbf{x}_k realizada tras recibir la lectura \mathbf{z}_k sería la media de la lectura y de la predicción realizada en t_{k-1} (basada en lecturas anteriores y en la información sobre el modelo teórico subyacente de la evolución de \mathbf{x}). Esto se puede interpretar así: como no tenemos experiencia con estas fuentes de información, no consideramos ninguna más fiable que la otra, sino que las combinamos obteniendo la media. No cabe duda de que resulta una decisión inicial más que razonable (de hecho, matemáticamente óptima en el caso lineal cuadrático).

A medida que el filtro de Kalman va obteniendo experiencia, esto es, a medida que trabaja con esas dos fuentes de información y va aprendiendo cuál es más fiable, encuentra el factor de ponderación óptimo para combinar esas informaciones en cada instante posterior. Además, como ya indicamos en el apartado anterior, el filtro de Kalman *recuerda* un poquito, lo más importante, lo esencial, acerca de los instantes pasados (en términos matemáticos, propaga la distribución de probabilidad de la(s) variable(s) a estimar).

En los siguientes apartados se planteará el problema de estimación lineal y su solución óptima basada en filtro de Kalman utilizando un enfoque matemático riguroso.

3.2 Planteamiento del problema de estimación lineal

El problema tratado consiste en estimar el estado de un sistema estocástico lineal utilizando mediciones que son funciones lineales del estado. Suponemos que los sistemas estocásticos pueden ser representados mediante modelos de planta y medición según las siguientes ecuaciones (3.4) a (3.7) en tiempo discreto. Nota importante: para cualquier duda sobre la notación, consúltase la sección de “Filtrado de Kalman” en la “Lista de símbolos” situada inmediatamente después del Índice de este PFC.

3.2.1 Modelo de planta

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k-1}\underline{\mathbf{x}}_{k-1} + \underline{\mathbf{w}}_{k-1} \quad (3.4)$$

siendo

$\underline{\mathbf{x}}_k$	La señal $\underline{\mathbf{x}}$ en el instante t_k , representada como un vector aleatorio $n \times 1$.
Φ_{k-1}	La matriz de transición de estados del sistema lineal dinámico (discreto) en el instante t_{k-1} , con dimensiones $n \times n$.
$\underline{\mathbf{x}}_{k-1}$	La señal $\underline{\mathbf{x}}$ en el instante t_{k-1} , representada como un vector aleatorio $n \times 1$.
$\underline{\mathbf{w}}_{k-1}$	El ruido de proceso $\underline{\mathbf{w}}$ en el instante t_{k-1} , representado como un vector aleatorio $r \times 1$.

Se asume que el ruido de planta (a veces llamado ruido de proceso) $\underline{\mathbf{w}}$ es un proceso gaussiano de media cero; por consiguiente, cada realización de ese proceso es un vector aleatorio⁷. Además, asumiremos que los ruidos de proceso y de planta están incorrelacionados ($\mathbb{E} \langle \underline{\mathbf{w}}_k \underline{\mathbf{v}}_j^T \rangle = 0$ para toda k y j). El proceso $\underline{\mathbf{x}}$ también es un proceso estocástico cuyas realizaciones $\underline{\mathbf{x}}_k$ son vectores aleatorios. El valor inicial $\underline{\mathbf{x}}_0$ es una variable gaussiana con media conocida $\underline{\mathbf{x}}_0$ y matriz de covarianzas conocida \mathbf{P}_0 .

3.2.1.1 Ecuación escalar para el modelo de planta

Sin más que establecer $n = 1$ y $r = 1$, los vectores aleatorios de señal y de ruido de proceso, así como la matriz de transición de estados, se convertirían en escalares y se podría escribir el siguiente modelo de planta escalar⁸:

⁷En este PFC, la negrita siempre indica aleatoriedad (consulte la “Lista de símbolos”).

⁸El razonamiento es aplicable tanto al caso de variables aleatorias reales como complejas.

$$\mathbf{x}_k = \varphi_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.5)$$

siendo

\mathbf{x}_k	La señal \mathbf{x} en el instante t_k , representada como una variable aleatoria (escalar).
φ_{k-1}	La variable (escalar) de transición de estados del sistema lineal dinámico (discreto) en el instante t_{k-1} .
\mathbf{x}_{k-1}	La señal \mathbf{x} en el instante t_{k-1} , representada como una variable aleatoria (escalar).
\mathbf{w}_{k-1}	El ruido de proceso \mathbf{w} en el instante t_{k-1} , representado como una variable aleatoria (escalar).

La aplicación más sencilla del filtrado de Kalman se obtiene cuando el modelo de planta tiene una transición escalar y constante $\varphi_k = \varphi$.

3.2.2 Modelo de medición

$$\underline{\mathbf{z}}_k = \mathbf{H}_k \underline{\mathbf{x}}_k + \underline{\mathbf{v}}_k \quad (3.6)$$

siendo

$\underline{\mathbf{z}}_k$	La medición $\underline{\mathbf{z}}$ en el instante t_k , representada como un vector aleatorio $l \times 1$.
\mathbf{H}_k	La matriz de sensibilidad de la medición, que define la relación lineal entre el estado del sistema dinámico y las mediciones que se pueden realizar en el instante t_k . Tiene dimensiones $l \times n$.
$\underline{\mathbf{x}}_k$	La señal $\underline{\mathbf{x}}$ en el instante t_k , representada como un vector aleatorio $n \times 1$.
$\underline{\mathbf{v}}_k$	El ruido de medición $\underline{\mathbf{v}}$ en el instante t_k , representado como un vector aleatorio $l \times 1$.

El ruido de medición $\underline{\mathbf{v}}_k$ es un vector aleatorio gaussiano de media cero que representa el error producido en una medición imperfecta y sujeta a distorsiones.

3.2.2.1 Ecuación escalar para el modelo de observación

De nuevo, sin hacer más que $n = 1$ y $l = 1$, se puede plantear el siguiente modelo de medición escalar:

$$\mathbf{z}_k = h_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.7)$$

siendo

\mathbf{z}_k	La medición \mathbf{z} en el instante t_k , representada como una variable aleatoria (escalar).
h_k	El valor (escalar) de la sensibilidad de la medición.
\mathbf{x}_k	La señal \mathbf{x} en el instante t_k , representada como una variable aleatoria (escalar).
\mathbf{v}_k	El ruido de medición \mathbf{v} en el instante t_k , representado como una variable aleatoria (escalar).

La aplicación más sencilla del filtrado de Kalman se obtiene cuando el modelo de medición tiene una sensibilidad de medición escalar y constante $h_k = h$.

3.2.3 Ecuaciones del ruido de planta

$$\mathbb{E} \langle \underline{\mathbf{w}}_k \rangle = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.8)$$

$$\mathbb{E} \langle \underline{\mathbf{w}}_k \underline{\mathbf{w}}_i^T \rangle = \Delta(k - i) \mathbf{Q}_k \quad (3.9)$$

donde $\Delta(k - i)$ es la función delta de Kronecker (un valor escalar) y \mathbf{Q}_k es la matriz de covarianzas (de dimensiones $n \times n$) del ruido del proceso utilizado en la dinámica de estados del sistema.

En palabras, esto significa que exigimos que el proceso $\underline{\mathbf{w}}$ tenga media cero (vector de ceros) y que las realizaciones $\underline{\mathbf{w}}_k$ del proceso $\underline{\mathbf{w}}$ en cada instante t_k estén incorrelacionadas entre sí (aunque dentro de cada instante t_k , puede haber una correlación no nula entre distintos elementos del vector aleatorio $\underline{\mathbf{w}}_k$, según precise \mathbf{Q}_k).

El caso más sencillo se obtiene cuando la matriz de covarianzas del ruido del proceso no varía a lo largo del tiempo; en tal caso, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$. Si estamos trabajando con ecuaciones escalares (según la transformación descrita en los apartados anteriores), el caso más sencillo se produce cuando $\sigma_{\mathbf{w},k}$, la varianza del ruido del proceso, es constante: $\sigma_{\mathbf{w},k} = \sigma_{\mathbf{w}}$.

3.2.4 Ecuaciones del ruido de observación

$$\mathbb{E} \langle \underline{\mathbf{v}}_k \rangle = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.10)$$

$$\mathbb{E} \langle \underline{\mathbf{v}}_k \underline{\mathbf{v}}_i^T \rangle = \Delta(k - i) \mathbf{R}_k \quad (3.11)$$

donde $\Delta(k - i)$ es la función delta de Kronecker (un valor escalar) y \mathbf{R}_k es la matriz de covarianzas (de dimensiones $l \times l$) del ruido de observación o medición.

Nuevamente, esto en palabras significa que exigimos que el proceso $\underline{\mathbf{v}}$ tenga media cero (vector de ceros) y que las realizaciones $\underline{\mathbf{v}}_k$ del proceso $\underline{\mathbf{v}}$ en cada instante t_k estén incorrelacionadas entre sí (aunque dentro de cada instante t_k , puede haber una correlación no nula entre distintos elementos del vector aleatorio $\underline{\mathbf{v}}_k$, según precise \mathbf{R}_k).

El caso más sencillo se obtiene cuando la matriz de covarianzas del ruido de observación no varía a lo largo del tiempo; en tal caso, $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}$. Si estamos trabajando con ecuaciones escalares (según la transformación descrita en los apartados anteriores), el caso más sencillo se produce cuando $\sigma_{\mathbf{v},k}$, la varianza del ruido de observación, es constante: $\sigma_{\mathbf{v},k} = \sigma_{\mathbf{v}}$.

3.2.5 Objetivo de la estimación

Con los modelos planteados en los apartados anteriores, el objetivo del filtrado de Kalman será encontrar una estima del vector $\underline{\mathbf{x}}_k$, de n estados; esa estima se representará como $\hat{\underline{\mathbf{x}}}_k$ y será una función lineal de las lecturas o mediciones $\underline{\mathbf{z}}_1, \dots, \underline{\mathbf{z}}_k$ que minimice el error cuadrático medio:

$$E[\underline{\mathbf{x}}_k - \hat{\underline{\mathbf{x}}}_k]^T \mathbf{M} [\underline{\mathbf{x}}_k - \hat{\underline{\mathbf{x}}}_k] \quad (3.12)$$

donde \mathbf{M} sea cualquier matriz de ponderación simétrica, definida y no negativa.

3.3 Solución al problema de estimación lineal

Se puede demostrar ([GRE93]) que el problema de estimación lineal planteado en los apartados anteriores se resuelve mediante el estimador de Kalman en tiempo discreto, procedimiento que se puede implementar informáticamente y que consta de los siguientes pasos básicos:

1. Extrapolación de la covarianza del error
2. Actualización de la estimación del estado con la nueva lectura
3. Actualización de la covarianza del error

4. Cálculo de la ganancia de Kalman

En los siguientes apartados se describirá cada etapa así como los cálculos y los parámetros involucrados.

3.3.1 Paso 1: Extrapolación de la covarianza del error

El filtro de Kalman se basa en una matriz de covarianzas, P , que guarda la información sobre la incertidumbre que tienen las estimaciones, el grado de “inseguridad” que el propio filtro de Kalman calcula tener sobre sus propias estimaciones (predicciones). Esta inseguridad aumentará, por ejemplo, si las nuevas lecturas permiten suponer que las estimaciones (predicciones) anteriores estaban más equivocadas de lo esperado.

El primer paso del filtrado consiste en extrapolar $P_{k-1}(+)$, que es la covarianza del error de estimación *a posteriori* del instante t_{k-1} , y actualizarla (integrando el paso del tiempo) para obtener $P_k(-)$, esto es, la covarianza del error de estimación *a priori* del instante t_k . En este contexto, *a priori* y *a posteriori* quieren decir antes y después, respectivamente, de incorporar la información relativa a la lectura del instante respectivo. El cálculo se puede realizar mediante la siguiente ecuación:

$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (3.13)$$

siendo

$P_k(-)$	La matriz de covarianzas del error <i>a priori</i> en el instante t_k , con dimensiones $n \times n$.
Φ_{k-1}	La matriz de transición de estados en el instante t_{k-1} , con dimensiones $n \times n$.
$P_{k-1}(+)$	La matriz de covarianzas del error <i>a posteriori</i> en el instante t_{k-1} , con dimensiones $n \times n$.
Q_{k-1}	La matriz de covarianzas del ruido de proceso \underline{w} en el instante t_{k-1} , con dimensiones $n \times n$.

3.3.2 Paso 2: Actualización de la estimación del estado

En este paso, se actualiza la estimación del estado incorporando la información de la última lectura (la de este instante). Para ello, primero tenemos que calcular la ganancia de Kalman, \bar{K}_k , que nos indica, por así decirlo, el factor de ponderación

(la fiabilidad) de cada fuente de información. Para calcular \bar{K}_k , se utilizan $P_k(-)$ (calculado en el paso 1), H_k y R_k , utilizando la siguiente ecuación ([GRE93]):

$$\bar{K}_k = P_k(-)H_k^T[H_kP_k(-)H_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.14)$$

siendo

\bar{K}_k	La matriz de ganancia de Kalman en el instante t_k , con dimensiones $n \times l$.
$P_k(-)$	La matriz de covarianzas del error <i>a priori</i> en el instante t_k , con dimensiones $n \times n$.
H_k	La matriz de sensibilidad de la medición, que define la relación lineal entre el estado del sistema dinámico y las mediciones que se pueden realizar en el instante t_k . Tiene dimensiones $l \times n$.
R_k	La matriz de covarianzas del ruido de medida \underline{y} en el instante t_k , con dimensiones $l \times l$.

3.3.3 Paso 3: Actualización de la covarianza del error

Una vez calculado \bar{K}_k en el paso 2 y $P_k(-)$ en el paso 1, podemos actualizar la matriz de covarianzas del error (la incertidumbre sobre la predicción) utilizando la siguiente ecuación ([GRE93]):

$$P_k(+) = [I - \bar{K}_k H_k] P_k(-) \quad (3.15)$$

Los parámetros de esta ecuación ya se han definido en los apartados anteriores. Es interesante observar que el factor que actualiza la matriz P a veces se denota por $K_k^1 = I - \bar{K}_k H_k$ y genera una proyección ortogonal a la ganancia de Kalman.⁹

3.3.4 Paso 4: Cálculo de la estimación y recursión

En este paso, se calculan los valores sucesivos de $\hat{\underline{x}}_k(+)$ recursivamente utilizando los valores calculados de \bar{K}_k (del paso 3), la estima inicial dada $\hat{\underline{x}}_0$, y los datos de entrada \underline{z}_k ¹⁰, mediante la siguiente ecuación:

⁹En cierto modo, el filtrado de Kalman es como si uno creara un espacio producto con dos proyecciones: una proyección es “lo que se puede saber del estado real a partir de la medida”; la otra proyección sería “lo que no se puede saber del estado real a partir de la medida, pero sí a partir del modelo”. La primera proyección sería $K_k^1 \hat{\underline{x}}_k(-)$ y la segunda proyección sería $\bar{K}_k \underline{z}_k$; y su suma sería $\hat{\underline{x}}_k(+)$.

¹⁰Nótese que \underline{z} es aleatorio en tanto medición con ruido aleatorio (gaussiano), pero en el filtro de Kalman el vector \underline{z} ya nos es conocido. La negrita solo enfatiza que contiene un ruido aleatorio.

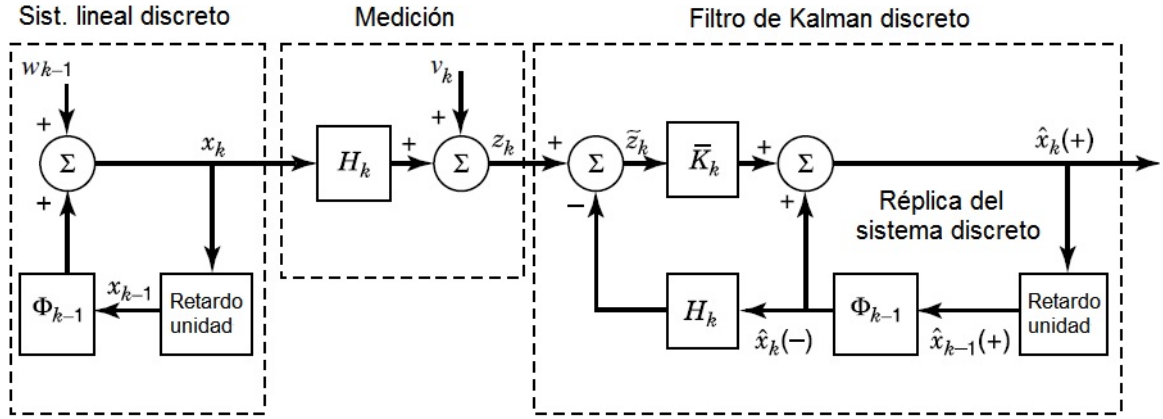


Figura 3.1: Diagrama de bloques del sistema lineal, la medición y el filtro de Kalman discreto

$$\hat{\underline{x}}_k(+) = \hat{\underline{x}}_k(-) + \bar{K}_k[\underline{z}_k - H_k \hat{\underline{x}}_k(-)] \quad (3.16)$$

Realizando iterativamente los pasos 1 a 4 para cada instante, se obtiene una estimación en línea mediante filtrado de Kalman. En la figura 3.1 se muestra un diagrama de bloques del sistema lineal, la medición y el filtro de Kalman discreto.

3.4 Tratamiento de los vectores de medición con errores incorrelacionados como escalares

En muchas aplicaciones (si no la mayoría de ellas) con vectores de medición \underline{z} , la correspondiente matriz R de covarianzas del ruido de medición es una matriz diagonal, lo cual significa que las componentes individuales de \underline{v}_k están incorrelacionadas. Para esas aplicaciones, es ventajoso considerar los componentes de \underline{z} como mediciones escalares independientes en vez de como medición vectorial. Con ello se obtienen dos importantes ventajas: un tiempo de cálculo mucho menor (el número de cálculos aritméticos es significativamente menor) y una mayor precisión numérica (al evitar redondeos en inversiones de matrices).

La implementación del filtro, en esos casos, requeriría l iteraciones de las ecuaciones de actualización con la nueva observación, utilizando las filas de H como “matrices” de medición (en realidad, de dimensión 1, y, por tanto, escalares) y los elementos diagonales de R como la varianza de ruido de medición (escalar) correspondiente.

En ese sentido, tal filtro matricial sería equivalente a un banco de filtros es-

cales que se podrían implementar de manera independiente, como si se hiciera un seguimiento de Kalman a variables escalares totalmente ajenas (matemáticamente lo son). El modelo de planta y ruido asociado a cada filtro vendría dado por las ecuaciones escalares equivalentes (3.5) y (3.7) que dedujimos en los apartados anteriores.

En el marco de este PFC, la reducción matricial-escalar será útil para cuando queramos seguir canales multitrayecto. Si partimos de que la ganancia de cada trayecto se puede considerar independiente en su evolución, el seguimiento de Kalman se podrá realizar mediante un banco de filtros de Kalman, cada uno de los cuales seguirá uno de los trayectos (*taps*) del canal.

3.5 Aplicaciones del KF en el seguimiento de canales para OFDM

El filtrado de Kalman aplicado al seguimiento de canales en sistemas OFDM ha sido propuesto, con múltiples y diversos enfoques, en la literatura técnica. A continuación exponemos brevemente algunas de estas aplicaciones.

3.5.1 El seguimiento KF supera a la estimación basada en secuencias de entrenamiento

En [YUA03] se propuso un novedoso método de estimación y seguimiento de canales para sistemas inalámbricos OFDM basado en pilotos y en filtrado de Kalman. Este *paper* analizaba sistemas OFDM de ráfagas coherentes, como los que adoptaron los estándares IEEE 802.11a (802.11g) y ETSI HiperLAN/2, utilizando un algoritmo de filtrado de Kalman para superar el AWGN y la ICI, y pilotos para hacer un seguimiento de las variaciones en la respuesta impulsiva del canal (incluyendo un sistema de compensación de fase basado en pilotos). Esta técnica se simuló en un canal con desvanecimiento Rayleigh y sistema LAN inalámbrico 802.11 a 5.0 GHz. El algoritmo completo se podía procesar en tiempo real con unas prestaciones sensiblemente mejores que las del método de estimación de canal (sin KF) basado en secuencias de entrenamiento o pilotos.

3.5.2 KF para seguimiento de los subcanales en el tiempo según el modelo de Jakes

En [CHE04] y, posteriormente, en [ZHA04], se trató de optimizar un método no relacionado con el filtrado de Kalman, la estimación de canal MMSE aplicada al tiempo de frecuencia. Esta técnica no abordaba la dinámica en el dominio del tiempo, cosa que los autores solventaron presentando un método KF para canales con desvanecimiento selectivo en tiempo y frecuencia. Basándose en un modelo autorregresivo del modelo de Jakes, se combinaba la estimación MMSE en el dominio de la frecuencia con un seguimiento mediante KF de la dinámica de los subcanales en el tiempo. Este sistema, de dos etapas, ofrecía unas prestaciones comparables a un estimador Kalman conjunto (tiempo-frecuencia) mucho más complicado. Los autores concluían que las buenas prestaciones derivadas de esta simplificación del sistema podrían deberse a que los componentes de tiempo y frecuencia del modelo de Jakes presentado en [BEE95] y [CHE00] fueran de naturaleza separable.

3.5.3 Una aplicación del carácter predictivo del KF

Un uso muy original del filtro de Kalman aparece en [SIM04]. Se trata de un patrón de pilotos adaptativo para sistemas OFDM. La idea subyacente es que la adaptación del enlace a través de canales con desvanecimiento en función de la información (disponible en el receptor) sobre el estado del canal aumenta la eficiencia espectral y la fiabilidad del enlace. Típicamente, esa adaptación se ha referido a la potencia, la modulación adaptativa, etc. Los autores plantean que la colocación de las subportadoras piloto en la rejilla de tiempo-frecuencia también se adapte a la predicción que, mediante un filtro de Kalman (concretamente, el cálculo de la matriz de covarianzas del error), se obtenga del error de la estimación del canal. Así, en función de la predicción de Kalman sobre el error previsible, se puede minimizar el número de subportadoras piloto que garantice una estima de canal suficientemente fiable en función de los requisitos de calidad del servicio (QoS, de *Quality of Service*). Las simulaciones mostraron la eficacia del algoritmo con respecto a un re-entrenamiento periódico.

3.5.4 KF: límites teóricos vs. límites prácticos

Las simulaciones publicadas no siempre resultan prácticas para su implementación en sistemas reales. El filtro de Kalman propuesto en [ALN07], hace un uso colectivo de las restricciones sobre los datos y sobre el canal inherentes al problema de comunicaciones, con la desventaja de que eso supone un coste computacional excesivo. Es

decir, otros enfoques se centran en un subconjunto de las posibles restricciones (las propiedades estadísticas del canal, los pilotos, etc.) mientras que [ALN07] utilizó todas las restricciones y las integró en un filtro de Kalman (de tipo *forward-backward*, aunque también se propone una implementación simplificada como filtro de Kalman de tipo *forward*) que esencialmente hace un número potencialmente ilimitado de aproximaciones recursivas que mejoren la precisión. Específicamente, las simulaciones demostraron que un mayor procesamiento de la señal siempre producía un mejor comportamiento en términos de la tasa de error binario (BER, de *Bit Error Rate*). Este trabajo nos muestra que, teóricamente, mediante filtrado de Kalman, se pueden lograr mejoras inesperadas¹¹ a cambio, eso sí, de un coste computacional totalmente fuera del rango implementable en la práctica actual.

3.5.5 Combinación de KF con otros algoritmos potentes

Algunas de las técnicas KF más interesantes son las que se proponen en combinación con algún otro algoritmo que haya mostrado su potencia por separado en trabajos anteriores. Así, por ejemplo, en [KYE05], se propone utilizar un algoritmo de descomposición QR (QRD)¹² adaptado a MIMO-OFDM, el algoritmo QRD-M, tras haber comprobado la potencia de la descomposición QR en la estimación de canal y la detección conjunta de datos para CDMA en un estudio anterior. La regla de decisión de máxima verosimilitud (ML, de *Maximum Likelihood*) basada en la QRD se corresponde con una búsqueda completa en un árbol, búsqueda cuya complejidad computacional se puede reducir considerablemente combinándola con el algoritmo M. Pues bien, el filtro de Kalman se emplea para la estimación conjunta de coeficientes de canal de manera similar a [KOM05]. La etapa QRD-M utiliza la estimación de canal calculada durante el intervalo de símbolo anterior, esto es, la predicción que en este PFC denotamos con $\hat{\mathbf{x}}_k(-)$. Las simulaciones demostraron que este sistema combinado QRD-M-KF superaba otras técnicas y presentaba un coste computacional significativamente menor, especialmente para constelaciones más grandes y un mayor número de antenas de transmisión. Además, resultaba robusto incluso para grandes retardos Doppler (normalizados). En resumen, al combinar KF con otro algoritmo probado, los autores lograron un buen candidato para

¹¹Inesperadas en la medida en que el filtro de Kalman es óptimo en problemas de estimación lineal, y no resulta obvio que existan relaciones lineales entre aspectos tan diversos como la correlación frecuencia y tiempo o el alfabeto finito de símbolos (por citar dos ejemplos utilizados) y la estimación óptima.

¹²En álgebra lineal, la descomposición o factorización QR de una matriz es una descomposición de la misma como producto de una matriz ortogonal Q por una triangular superior R . La descomposición QR se utiliza a menudo para resolver el problema lineal de mínimos cuadrados y es la base del algoritmo QR utilizado para el cálculo de los vectores y valores propios de una matriz.

su implementación en sistemas MIMO-OFDM.

Otra combinación con el KF se presenta en [BAN07]. En este caso, se hace un seguimiento de Kalman asistido por datos para la estimación de canal en sistemas OFDM afectados por el efecto Doppler. El filtro de Kalman se utiliza para estimar la (rápida) variación del canal de un símbolo OFDM a otro, aprovechando la información de un modelo de expansión de bases (BEM, de *Basis Expansion Model*). La estimación del filtro de Kalman se refina iterativamente mediante la ayuda de pilotos y/o datos en una modulación asistida por símbolos piloto (PSAM, de *Pilot Symbol Assisted Modulation*), real o virtual (V-PSAM). De esta manera, al combinar KF y PSAM, se logra mejorar la BER global, aunque los autores sugieren que se podría estudiar más a fondo esta técnica.

Estos estudios sugieren que combinar KF con otras técnicas probadas puede dar lugar a mejoras significativas en la BER.

3.5.6 KF en canales con parámetros desconocidos y en canales con tendencias

Las aplicaciones más habituales de KF se basan en modelos autorregresivos o muy similares (como BEM) que aproximan¹³ modelos de canal bien definidos como el de Jakes o el de Rayleigh.

Un caso peculiar es aquel en el que el modelo de canal no está perfectamente caracterizado. En [KIY04], por ejemplo, se intenta estimar canales con desvanecimiento rápido para OFDM mediante un filtro de Kalman modificado (MKF, de *Modified Kalman Filter*), pero, aunque el canal se puede describir según proceso autorregresivo (AR, de *autoregressive*), sus parámetros son desconocidos y se propone estimar los parámetros del proceso AR minimizando el error cuadrático medio (MSE, de *Mean Square Error*). El resultado es que los canales simulados son paseos aleatorios y las prestaciones del MKF son comparables a las del KF que sí conoce los parámetros del proceso AR. En la práctica, esto supone que el KF se puede utilizar incluso cuando hay incertidumbre sobre el parámetro de desvanecimiento (o la frecuencia Doppler).

En cambio, en [HUA14], se desecha el modelo autorregresivo típico en favor de un modelo de paseo aleatorio integrado¹⁴. Sus simulaciones apoyan la idea de que, en

¹³El proceso para crear estos modelos consiste, típicamente, en sintetizar el modelo deseado con un filtro y luego obtener la varianza del ruido de proceso (o la matriz de covarianzas, en su caso) a partir de la ecuación de Yule-Walker descrita, entre otros, en [POR94].

¹⁴“Paseo aleatorio integrado” significa que el gráfico de la velocidad dibuja un paseo aleatorio. El gráfico de la posición (esto es, el gráfico de la amplitud compleja del subcanal) es la integral de la velocidad, la integral del paseo aleatorio. Por tanto, la amplitud compleja no es un paseo

ese caso, el KF monotrayecto resultante supera los KFs basados en modelos autorregresivos propuestos en la literatura, como algunos de los explicados anteriormente.

3.5.7 Conclusiones prácticas

De la revisión de antecedentes en la literatura, se pueden extraer las siguientes conclusiones prácticas:

- La aplicación de KF a sistemas OFDM **puede mejorar la estimación de canal y reducir el BER**. Entre los estudios citados, por ejemplo, las simulaciones de [YUA03, CHE04, ZHA04, ALN07, KYE05, BAN07, HUA14] demuestran mejoras en la estimación de canal y reducciones en la tasa de error binario. En el caso de [SIM04], la mejora consiste en cumplir las condiciones QoS con el mínimo número de pilotos, y en [KIY04] se presenta la mejora añadida de poder trabajar con canales de desvanecimiento/frecuencia Doppler desconocidos.
- La propuesta típica consiste en **aplicar KF al seguimiento de la variación temporal de los subcanales**. Aunque existen numerosas propuestas diferentes para aplicar KF a OFDM, la práctica totalidad (incluidos todos los *papers* explicados anteriormente) emplean KF para aprovechar la correlación en el dominio del tiempo, de manera independiente de, o combinada con, otros sistemas que aprovechen la correlación en el dominio de la frecuencia. En ese sentido, algunas de las propuestas más interesantes combinan KF con otras técnicas probadas, como en [KYE05] con la descomposición QR, o como la asistencia de pilotos (PSAM) en [BAN07].
- **La simplificación del KF matricial utilizando un banco de filtros de Kalman escalares** puede resultar precisa bajo ciertas circunstancias. Utilizar filtros de Kalman escalares para cada subcanal es equivalente a suponer que la evolución temporal de cada subcanal está incorrelacionada con la de los demás subcanales. En [HUA14] se demuestra que, cuando la variación temporal es lenta o moderada, se puede obtener una estimación de la amplitud compleja multitrayecto del canal utilizando el modelo de paseo aleatorio (RW, de *Random Walking*) integrado. El banco de filtros RW-KF monotrayecto propuestos se muestra tan eficaz como el RW-KF exacto (esto es, el RW-KF multitrayecto conjunto) y supera los KFs basados en modelos autorregresivos propuestos en la literatura. Esto da apoyo a nuestra decisión (explicitada más adelante) de

aleatorio, sino que presenta tendencias.

realizar las simulaciones multitrayecto según modelos de Gauss-Markov mono-trayecto no correlacionados.

Por consiguiente, la intención de analizar el filtrado de Kalman en sistemas OFDM (filtrado que pretende mejorar la estimación y el seguimiento de canal, aprovechando la correlación de cada subcanal en el dominio del tiempo, y simplificando el KF matricial mediante bancos de filtros de Kalman escalares¹⁵), encaja perfectamente con el conocimiento actual y las propuestas más recientes publicadas en la literatura técnica. Además, la popularidad y la fortaleza del KF subrayan la necesidad de estudiar cómo se comporta en entornos no lineales; de toda la literatura, cabe destacar también la brillante ausencia de estudios sobre cómo afectan al KF el nacimiento y la muerte de trayectos. Este PFC pretende paliar tal carencia.

¹⁵Simplificación que también se hará, más adelante, en las simulaciones de este PFC

Capítulo 4

Seguimiento de canal en sistemas no lineales

En el capítulo anterior, estudiamos el filtro de Kalman, que es el estimador óptimo en problemas lineales y gaussianos. ¿Qué sucede cuando el problema no es tan lineal? En entornos no lineales, el filtro de Kalman pierde su optimalidad. En el ámbito de las comunicaciones, la no linealidad del canal hace que la estimación de canal basada en el filtrado de Kalman pierda prestaciones (incluso de manera catastrófica, como demostraremos más adelante, en este PFC, mediante las simulaciones). Uno de los enfoques propuestos para realizar el seguimiento de canales no lineales en OFDM, cuando la no linealidad se refiere a la aparición y a la desaparición de nuevos trayectos, está basado en la Teoría de Conjuntos Aleatorios (RST, de *Random Set Theory*). En este capítulo se explica qué es la Teoría de Conjuntos Aleatorios, cómo se ha ido introduciendo en distintos ámbitos típicamente asociados a la Ingeniería de Telecomunicaciones, y, en concreto, cómo puede ayudar al seguimiento de canales no lineales en entornos OFDM.

4.1 Concepto e historia de la Teoría de Conjuntos Aleatorios

Los conjuntos aleatorios son elementos aleatorios que toman valores como subconjuntos de algún espacio, sirviendo como modelos matemáticos generales de observaciones cuyos valores son conjuntos, así como para patrones geométricos irregulares. Los conjuntos aleatorios generan el concepto tradicional de puntos/vectores aleatorios ordinarios.

Explicuémoslo de forma algo más comprensible. $\{3, \pi, 7.23\}$ es un conjunto for-

mado por tres números reales. De manera similar, se puede definir sin dificultad un conjunto de vectores. En realidad, se puede definir un conjunto en cualquier espacio de elementos sin más que tomar alguno(s) de esos elementos. Pues bien, igual que se puede definir una variable aleatoria que tome como valor un número real, p. ej., una v.a. \mathbf{x} que tome valores reales según una distribución de probabilidad uniforme $U[0, 1]$, e igual que se puede definir una entidad aleatoria \mathbf{y} que tome como valor un vector (y en ese caso hablamos de un “vector aleatorio”), también se pueden definir probabilidades generalizadas sobre cualquier otro tipo de conjuntos, y entonces tales conjuntos se pueden denominar “conjuntos aleatorios”¹. Piénsese, por ejemplo, en **un conjunto donde no solo es aleatorio cada elemento sino también el propio número de elementos**; por ejemplo, el conjunto de los trayectos de un canal multitrayecto. No solo desconocemos la ganancia compleja asociada a cada trayecto, sino que quizá tampoco sepamos si hay dos, tres o cuatro trayectos activos en un determinado momento. La forma natural de modelar esto es mediante un conjunto aleatorio donde el número de elementos es aleatorio (y también es aleatorio el valor de cada elemento). Este es el tipo de conjunto aleatorio generalizado que se puede aplicar para el seguimiento de canales no lineales y otros problemas de telecomunicaciones.

Siendo una generalización tan natural de los conceptos de probabilidad y estadística aplicados a las variables aleatorias habituales (y especialmente a los vectores aleatorios), quizá sorprenda que, aunque vinieran siendo utilizados desde mediados del siglo XX (p. ej. para diseños de muestro estadístico en [HAJ81], geometría estadística en [KEN74], y estadística en [ROB44]), su primer tratamiento formalizado (según se entienden hoy²) no se realizara hasta 1975 en [MAT75]. En el prólogo al libro de Mathéron sobre conjuntos aleatorios ([MAT75]), G. Watson expresó su visión de la estadística con estas palabras:

La estadística moderna se debe definir como las aplicaciones de las computadoras y de las matemáticas al análisis de datos. Debe crecer a medida que se consideren nuevos tipos de datos y a medida que avance la tecnología informática.

Esa cita quizá sea la mejor forma de expresar lo que ha venido sucediendo (y posiblemente siga sucediendo en el futuro) en torno a la relación de los conjuntos aleatorios

¹De hecho, las variables aleatorias habituales en comunicaciones (como las que toman valores en \mathbb{R} , en \mathbb{C} o en \mathbb{C}^n , no son más que un tipo concreto de conjuntos aleatorios, igual que los números naturales o los intervalos de \mathbb{R}^n no son más que ejemplos concretos de conjuntos.

²Aunque Kolmogorov ya trató conjuntos aleatorios en [KOL50], se atribuye a Mathéron ([MAT75]) su primer tratamiento formalizado como variables aleatorias en espacios topológicos de Hausdorff, localmente compactos y segundo numerables. Para más detalles sobre las aportaciones originales de Mathéron, se recomienda consultar [MOL05b].

y la ingeniería. Así, por pura necesidad, la ingeniería (y las finanzas, etc.) han tenido que recurrir a los avances de las matemáticas para encontrar nuevas soluciones en el análisis de datos y esto, a su vez, ha propulsado la investigación matemática en torno a la Teoría de Conjuntos Aleatorios, con importantes aportaciones recientes en [MOL05].

4.2 Incorporación de la Estadística de Conjuntos Finitos al seguimiento multiobjetivo

La Teoría de Conjuntos Aleatorios se aplicó por primera vez a las telecomunicaciones para resolver problemas de seguimiento multiobjetivo (*multitarget tracking*), popularizándose como Estadística de Conjuntos Finitos (o FISST, de *FInite Set STatistics*) con la gran obra de Mahler, Goodman y Nguyen ([GOO97]).

Al fin y al cabo, la Teoría de Conjuntos Aleatorios no es más que una teoría de probabilidad de conjuntos (a todos nuestros efectos, finitos) que exhiben aleatoriedad no solo en cada uno de los elementos, sino también en el número de elementos ([BIG09]); así pues, conforman el escenario matemático ideal para estudiar problemas en los que no solo no sabemos quiénes están ahí, sino que tampoco sabemos cuántos son. Este planteamiento es frecuente en problemas de radar (no se sabe quiénes son los objetivos, pero a veces tampoco cuántos objetivos hay y cuántas señales son pistas falsas), y también, como veremos en el siguiente apartado, en problemas de comunicaciones inalámbricas.

Aplicando las técnicas matemáticas desarrolladas en [GOO97], una vez obtenida una función de densidad a posteriori $f(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p})$ en todo el espacio de conjuntos (por ejemplo, tanto para el plano de que haya un objetivo, como para los planos de que haya dos, tres, cuatro, cinco objetivos, etc.), condicionada a las muestras obtenidas, se pueden definir un par de estimadores bayesianos, los llamados GMAP-I (o “Estimador multiobjetivo marginal”) y el GMAP-II (o “Estimador multiobjetivo conjunto”). La diferencia entre uno y otro reside en que GMAP-I es un estimador de dos etapas en el cual se estima primero la cardinalidad del conjunto (es decir, primero se decide si hay 3 objetivos o si hay 7; y, posteriormente, se decide cuáles son esos 3 o 7 objetivos), mientras que GMAP-II realiza la estimación en una sola etapa.

La implementación práctica de estos algoritmos en aplicaciones de radar involucra la programación de filtros de partículas. En general, son muy costosos computacionalmente pero eso no resulta demasiado problemático en algunas aplicaciones militares, al menos en comparación con lo habitual en las comunicaciones

inalámbricas. Piénsese que no es lo mismo saber con un segundo de retardo cuántos enemigos hay y dónde se encuentran (especialmente si no existe ninguna alternativa tecnológica que lo haga antes y mejor), que retardar un segundo adicional cualquier comunicación entre una estación base y un móvil, por ejemplo.

Otras aplicaciones militares sin una traducción directa en el ámbito de las comunicaciones son las referidas a cartografiar todas las posibles posiciones del enemigo teniendo en cuenta la imprecisión sobre el modelo probabilístico subyacente ([RIS11]). Aunque en comunicaciones inalámbricas no solemos pintar al enemigo en mapas para bombardear allí donde pueda estar, en el apartado 10.2.3, “Aleatorización adaptativa bajo incertidumbre del comportamiento estocástico del canal” se propondrá aplicar a OFDM la misma idea fundamental que se esconde en esos bosques militarizados: la aleatorización del propio modelo estocástico empleado, con el fin de incorporar la incertidumbre sobre la hipótesis de partida.

4.3 Las aportaciones de Biglieri *et al.*

La aplicación de RST a los problemas de seguimiento multiobjetivo suscitó el interés de Biglieri y Lops, quienes decidieron aplicar las mismas ideas a problemas de comunicaciones inalámbricas. Primero lo aplicaron al problema de la detección multiusuario ([BIG06]). Vale la pena echar un vistazo al siguiente extracto de este *paper*:

En las comunicaciones móviles de acceso múltiple, no solo se desconoce la ubicación de los usuarios activos, sino que también varía con el tiempo su número. En los análisis típicos, la teoría de la detección multiusuario ha sido desarrollada bajo la presuposición de que el número de usuarios activos es constante y conocido en el receptor, y de que coincide con el número máximo de usuarios con derecho a acceder al sistema. Esta presuposición resulta, a menudo, extremadamente pesimista, dado que muchos usuarios podrían estar inactivos en un momento dado, y la detección realizada bajo la presuposición de un número de usuarios mayor que el real podría reducir las prestaciones.

Los autores, por tanto, deciden recurrir a la RST porque no tiene sentido práctico suponer que todos los usuarios estén activos al mismo tiempo. (Esto contrasta con la utilidad práctica que tiene recurrir a la RST en problemas de seguimiento de canal OFDM, donde la ventaja es otra: evitar la gran degradación que se produce en el filtrado de Kalman cuando hay nacimiento y muerte de trayectos). Más

tarde, los autores pusieron el punto de mira en otro aspecto de las comunicaciones: el seguimiento en canales multitrayecto ([BIG09]) y, con el equipo ampliado a un nuevo autor (Angelosante), lograron crear un modelo RST para el seguimiento multitrayecto en OFDM ([ANG07]) y en MIMO-OFDM ([ANG09]).

El modelo RST para seguimiento multitrayecto no tiene una complejidad trivial. El lector que desee iniciarse en estas técnicas puede encontrar una exposición detallada y con una guía de recomendaciones en el Apéndice A. La idea básica consiste en definir conjuntos aleatorios de elementos con dos “dimensiones”³: una dimensión es el número de trayecto, un número que lo define como trayecto (el trayecto 1, el trayecto 5, etc.); la otra dimensión es el valor de su ganancia compleja (p. ej. $0,8 + 0,2i$). Una forma muy intuitiva de comprender el problema es imaginarse unas buenas porciones de queso curado; estas porciones, cortadas en tacos⁴ o lonchas⁵, se pueden poner una detrás de otra. Así, podríamos hablar de un primer queso o primer trayecto, de un quinto queso o quinto trayecto, etc. Dentro de cada porción de queso, hay un agujero; exactamente un agujero. Ese agujero representa el punto de \mathbb{R} o \mathbb{C} , respectivamente, que coincide con la ganancia verdadera del trayecto en un determinado instante. Delante de los quesos hay una persona con los ojos tapados, que somos nosotros (¡el estimador!); sin más que palpar durante unos segundos con unos dedos enguantados, tenemos que detectar, al tacto enguantado, la ubicación de esos agujeros. Lamentablemente, como no tenemos tiempo ni el tacto enguantado es muy fiable, nuestra situación es precaria: tenemos que decidir una estrategia a seguir, dónde tocar primero y qué conclusiones sacar.

Y ahí es donde entran en juego los distintos estimadores posibles al aplicar RST. Uno podría, por ejemplo, pensar en tocar primero el centro de la loncha, para detectar si esa loncha o trayecto tiene el agujero justo en el centro (ganancia cero, esto es, trayecto inactivo). O, por el contrario, podría pensar en tocar primero el lugar donde recuerda que estaba el agujero en el instante anterior, previendo que ahora no esté muy lejos de allí. Puede decidir primero qué trayectos han muerto (qué lonchas tienen el agujero justo en el centro), o quizá puede decidir primero cuántos trayectos han muerto (tocando rápidamente todas las lonchas sin fijarse en el orden), etc.

³El término “dimensión” se utiliza aquí de manera explicativa y sin rigor alguno. Podrían utilizarse como sinónimos los términos “facetas”, “vertientes” o, de manera mucho más rigurosa, “proyecciones”.

⁴Si tienen forma de tira, es más fácil ver la recta real. Son ideales para imaginarse ganancias reales.

⁵Una loncha suficientemente grande es la metáfora ideal del plano complejo o una porción acotada del mismo.



Figura 4.1: Queso en lonchas como alegoría de la estimación con Teoría de Conjuntos Aleatorios. Para que el experimento mental llegue a buen puerto, las lonchas no pueden estar dobladas y solo deben presentar un único agujero.

Estas son, explicado de manera muy fácil e intuitiva, las distintas técnicas de estimación disponibles. Si uno toca rápidamente todas las lonchas sin fijarse en el orden, por ejemplo, está calculando la primera etapa del estimador GMAP-I (la segunda consiste en calcular la ubicación de los agujeros en cada loncha). La expresión matemática de este estimador tiene la siguiente forma:

$$\text{GMAP-I: } \begin{cases} \hat{n}_p = \arg \max_{n_p \in 0, \dots, L_{\max}} f_{n_p | \mathbf{y}_{1:p}}(n_p, \mathbf{y}_{1:p}), \\ \hat{H}_p = \arg \max_{\mathcal{H}_p: |\mathcal{H}_p| = \hat{n}_p} f_{\mathcal{H}_p | \mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p, \mathbf{y}_{1:p}), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde los detalles de los parámetros se pueden consultar en el Apéndice A. Como se puede observar, se trata de expresiones bastante enrevesadas. Este carácter enrevesado constituye, probablemente, una de las mayores deficiencias de la RST, ya que supone un barrera importante para los ingenieros no familiarizados.

“¿Cuál es la solución óptima?”, se preguntará el lector. Pues se trata de una técnica, el estimador GMAP-III, propuesta en [ANG07]. Siguiendo la alegoría de los quesos, consistiría en palpar el centro de las lonchas y establecer cuáles de las lonchas tienen el agujero en el centro (p. ej. la loncha 2 y la loncha 4). Posteriormente, se concentra uno en palpar las lonchas restantes (los demás trayectos) para ubicar el agujero (calcular la ganancia verdadera a partir de densidades de probabilidad). La expresión matemática es:

$$\text{GMAP-III: } \begin{cases} \widehat{\pi(\mathcal{H}_p)} = \arg \max_{\pi(\mathcal{H}_p)} f_{\pi(\mathcal{H}_p) | \mathcal{Y}_{1:p}}(\pi(\mathcal{H}_p) | \mathcal{Y}_{1:p}), \\ \tilde{\mathbf{h}}_p = \int_{\mathbb{R}^{2|\widehat{\pi(\mathcal{H}_p)}|}} \mathbf{h}_p f_{\mathbf{h}_p | \mathcal{Y}_{1:p}}(\mathbf{h}_p | \mathcal{Y}_{1:p}) d\mathbf{h}_p \end{cases} \quad (4.2)$$

donde

$$f_{\pi(\mathcal{H}_p)|\mathcal{Y}_{1:p}}(\pi(\mathcal{H}_p)|\mathcal{Y}_{1:p}) = \int_{\pi'(\mathcal{H}_p)} f(\mathcal{H}_p|\mathcal{Y}_{1:p}) \delta \mathcal{H}_p \quad (4.3)$$

y la definición de cada parámetro se puede consultar en el Apéndice A. La principal ventaja de aplicar RST (respecto de las alternativas preexistentes) consiste en que las simulaciones de [ANG07, ANG09] mostraron una gran ventaja de su estimación respecto del filtro de Kalman no modificado y respecto de la estimación por mínimos cuadrados. Para una discusión más detallada, consúltese el Apéndice A.

Capítulo 5

Análisis del estado actual del problema

Tras el estudio exhaustivo de los antecedentes, hemos desarrollado una visión de conjunto que nos permite hacer un análisis propio sobre el punto en el que se encuentra la tecnología y por dónde se podría abordar la dinámica de nacimiento y muerte de trayectos.

5.1 Crítica de la hipótesis de linealidad/gaussianidad

La hipótesis de linealidad/gaussianidad subyacente a la mayoría de los modelos basados en KF no aparece explícitamente ni se justifica documentalmente su utilización. Cabe partir de que, si se siguen proponiendo modelos basados en KF, es porque deben de funcionar bien en la práctica. Sin embargo, en la medida en que las comunicaciones móviles, al ampliarse a nuevos ámbitos (mayor velocidad, mayor diversidad geográfica, etc.), se van a encontrar con escenarios más desafiantes, esto le resta atractivo a seguir utilizando KF “porque hasta ahora funcionaba”. Resulta plausible pensar que, en el futuro, las dinámicas de nacimiento y muerte de trayectos (así como otras eventuales no linealidades) cobren una importancia tal que ya no se pueda ignorar el hecho de que partíamos de una hipótesis, de una aproximación, más bien reduccionista, como demuestran las simulaciones que se presentarán más adelante en este PFC (y que demuestran una degradación catastrófica de la estimación mediante KF cuando se introduce no linealidad en el problema).

En ese sentido, parece que flota en el aire una idea de “mejor utilizar un mapa incorrecto que no utilizar ningún mapa”. El problema de esta idea es que puede hacernos soslayar que estamos entrando en territorios no explorados.

¿Qué solución resulta mejor que seguir basándonos en KF? Posiblemente la apli-

cación de una combinación de nuevas aproximaciones cuya estimación dé buenos resultados sobre datos empíricos. Es decir, si uno quiere hacer un seguimiento de canal multitrayecto con un tren a alta velocidad pasando entre montañas, lo primero que necesita son buenos datos del multitrayecto real. Estos datos se recogen desde hace décadas; lamentablemente, no existen a fecha de hoy¹ modelos simples, realistas, tratables y de calidad con los que se pueda trabajar.

5.2 Crítica de RST: poca manejabilidad, coste computacional excesivo e hipótesis de certeza en los datos de partida

Esta dificultad se ve magnificada por el hecho de que, en cuanto se introduce la no linealidad, las posibles soluciones óptimas requieren un coste computacional excesivo. Así, por ejemplo, un modelo simplísimo de dinámica de nacimiento y muerte de trayectos es el que se utiliza en [ANG07] y en el presente PFC, basado en probabilidades de nacimiento y muerte de trayectos, P_{birth} y P_{death} , constantes y conocidas. La única solución conocida para resolver un seguimiento multitrayecto de este tipo con cierta optimalidad requiere de aplicar RST y utilizar filtros de 10.000 partículas, lo cual resulta inviable en sistemas de comunicaciones actuales. A esto hay que añadir la dificultad de comprender, manejar y aplicar RST, lo cual supone una barrera de entrada para los ingenieros que deseen dominar la materia y aplicarla a escenarios con ligeras modificaciones.

Otra posible dificultad asociada a la aplicación de la RST es su sobreadaptación a los datos de partida, que considera precisos, incuestionables e infalibles. Lamentablemente, no resulta verosímil que, ante dinámicas tan difíciles de modelar como el nacimiento y muerte de trayectos (cuya probabilidad ni siquiera tiene por qué mantenerse constante a lo largo de la comunicación), podamos partir de una probabilidad tan precisa como el 5 % (probabilidad empleada en [ANG07, ANG09]). Antes bien, parece mucho más lógico partir de que nuestro conocimiento de la probabilidad está sumido en la incertidumbre y, por tanto, tenemos una idea difusa de la probabilidad, mejor representada por una función de densidad en un intervalo (pongamos, un intervalo centrado en el 5 %) que por un único punto. Sin embargo, algo tan sencillo aparentemente como introducir cierta aleatoriedad o incertidumbre en los datos de partida supone multiplicar un coste computacional de resolución ya excesivo.

¹Que el autor conozca.

5.3 Necesidad de un nuevo enfoque

Los defectos expuestos en las dos secciones anteriores apuntan a la necesidad de abordar el problema desde un nuevo enfoque. Una posibilidad sería aprovechar que el problema quizá se pueda dividir en dos componentes de naturaleza separable, una lineal y otra no lineal. Una vez realizadas las simulaciones de este PFC, en el apartado 10.2.1, “Resolución *ad hoc* del problema no lineal”, se realizará una propuesta de estudio en este sentido.

Capítulo 6

Simulación 1: Kalman monotrayecto

Seguimiento de un canal monotrayecto mediante filtro de Kalman

En este capítulo y los dos siguientes presentamos una descripción, detallada por etapas, de los aspectos teóricos y la implementación del trabajo realizado, consistente en simulaciones relacionadas con nuevos enfoques para la estimación en OFDM. En concreto, esta primera simulación se refiere a un filtro de Kalman para seguimiento de una ganancia de trayecto que evoluciona según un modelo de Gauss-Markov lineal.

6.1 Modelo de Gauss-Markov lineal

El modelo de Gauss-Markov lineal constituye el modelo probabilístico subyacente al filtro de Kalman y, por tanto, reviste una importancia central en los desarrollos de los últimos quince años en torno al seguimiento de canales en OFDM (incluida la presente investigación). Es muy importante comprender bien este modelo y las grandes simplificaciones que supone respecto de los canales físicos reales. Si bien resulta muy cómodo trabajar con él, su aplicación indiscriminada y exenta de escepticismo puede cosechar resultados matemáticamente elegantes, de gran sofisticación, y absolutamente inservibles en la vida real.

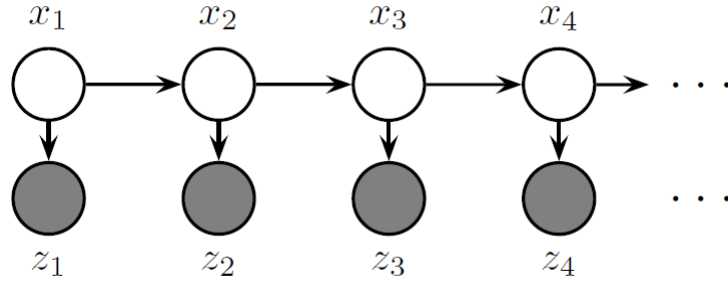


Figura 6.1: El diagrama de independencia de un modelo de Gauss-Markov

6.1.1 Definición y breve explicación teórica

Considérense las variables de estado escalares¹ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}$, donde la negrita indica que son variables aleatorias, y considérese que $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t+1}$ son la secuencia de las observaciones correspondientes. Como en los modelos ocultos de Markov, las independencias condicionales (véase la Figura 6.1) establecen que los estados pasados y futuros están incorrelacionados dado el estado actual, \mathbf{x}_t , en el instante t . Esto significa que si, por ejemplo, conocemos el valor de \mathbf{x}_2 , entonces ninguna información sobre \mathbf{x}_1 podría ayudarnos a razonar qué valor debe tener \mathbf{x}_3 .

Entonces $\{\mathbf{x}_t\}$ sigue un modelo de Gauss-Markov lineal, si:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \lambda \mathbf{x}_t + \epsilon \quad (6.1)$$

donde

- λ es un parámetro escalar (en nuestro caso, una constante real); y
- ϵ es un variable aleatoria de errores, con esperanza $E(\epsilon) = 0$ y $Var(\epsilon) = \sigma_\epsilon^2$. Además, típicamente (y también a todos los efectos prácticos de este trabajo) se supone que el error sigue una distribución normal: $\epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$.

Pensemos ahora en un canal con varios trayectos y veremos cómo utilizar esta expresión. Para un instante dado² p , vamos a denominar $\mathbf{h}_p^{(k)}$ a la ganancia del trayecto k -ésimo. Queremos que la ganancia del trayecto varíe, con mayor o menor rapidez, respecto de la que había en el instante $p - 1$. Un modelo de Gauss-Markov lineal

¹El modelo de Gauss-Markov lineal se puede aplicar también, por supuesto, a vectores y a variables de estado de dimensión uno pero complejas. El razonamiento sería análogo y su desarrollo a partir de esta exposición resultaría trivial.

²Se utiliza indistintamente la notación “instante p ” o instante t_p ” para referirnos al mismo lapso.

que cumple esta condición tendría la forma:

$$\mathbf{h}_p^{(k)} = \lambda \mathbf{h}_{p-1}^{(k)} + \epsilon \quad (6.2)$$

donde λ es un parámetro escalar y el error seguiría una distribución normal $\epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ con varianza σ_ϵ^2 , que será una medida de lo rápido que varía el canal. Los parámetros utilizados en varios *papers* de referencia ([ANG07, ANG09]) y en nuestra propia simulación³ son: $\lambda = 0.999$ y $\sigma_\epsilon = (1 - \lambda^2)\sigma_h^2$, donde σ_h^2 es igual a la energía media de un trayecto.

En función del objetivo del modelo, uno podría inicializar $\mathbf{h}_1^{(k)}$ en un valor determinado (p. ej. $\mathbf{h}_1^{(k)} = 0$) o bien podría aleatorizar su valor inicial. En tal caso, por ejemplo, la ganancia del trayecto k -ésimo en el instante p podría seguir las siguientes distribuciones:

$$\mathbf{h}_1^{(k)} \sim N(0, \sigma_h^2) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{h}_p^{(k)} | \mathbf{h}_{p-1}^{(k)} \sim N(\lambda \mathbf{h}_{p-1}^{(k)}, (1 - \lambda^2)\sigma_h^2) \quad (6.4)$$

Obsérvese que el modelo de Gauss-Markov es una aproximación muy grosera al comportamiento real de cualquier canal físico, hasta el punto de que siempre es posible obtener valores de ganancia $|\mathbf{h}_p^{(k)}| > 1$, los cuales representan un canal que amplifica la señal en vez de tener pérdidas. Obviamente, los canales físicos habituales no amplifican. Dependiendo de los parámetros, puede hacerse que esa situación sea relativamente improbable, pero esta anomalía muestra que la ventaja del modelo de Gauss-Markov lineal no reside en modelar de manera realista los canales físicos habituales (pues no lo hace), sino que su punto fuerte consiste en que el filtro de Kalman proporciona la solución matemáticamente óptima para estimar canales gaussianos y lineales. Por tanto, a la hora de comparar las prestaciones de un filtro de Kalman con las de un nuevo algoritmo, tiene sentido basarse, aunque sea parcialmente, en el modelo de Gauss-Markov lineal (como extremo más favorecedor o escenario “cuasi óptimo” para el filtro de Kalman). Ese es el motivo implícito de utilizar Gauss-Markov lineal que se desprende de los trabajos ([ANG07, ANG09]) que comparan el filtrado de Kalman estándar con métodos diferentes, como los resultantes de aplicar Teoría de Conjuntos Aleatorios Finitos.

³Este PFC también incluye simulaciones con $\lambda = \{0, 9; 0, 95; 0, 99\}$.

6.2 Filtro de Kalman para un solo trayecto

Considérese un enlace de radio punto a punto, a través del cual se envían secuencias de entrenamiento para producir una estima basada en datos en el intervalo asociado a cada trama. Es razonable pensar que el canal variará levemente durante cada uno de esos intervalos, pero simplificaremos el modelo suponiendo que el canal es invariante durante cada intervalo. El objetivo de realizar esta estimación/seguimiento de un canal monotrayecto es tener un mejor conocimiento del seguimiento mediante filtros de Kalman antes de generalizarlo a entornos OFDM (y, por tanto, multitrayecto).

Como se explicó en el capítulo 3 sobre filtros de Kalman, el filtro de Kalman trata de ponderar, mediante la experiencia de los resultados, las dos fuentes de información disponibles: un modelo subyacente (una ecuación del modelo) y unas mediciones (que se rigen por una ecuación de observación). Trataremos de seguir este canal monotrayecto con ayuda del modelo de canal subyacente y, al proyectar las estimaciones mediante el modelo de canal y combinar la estima predecida con la estimación de los datos, trataremos de mejorar la estimación del canal que se basa exclusivamente en datos.

Para mantener el modelo en los parámetros sencillos utilizados por otros estudios de OFDM ([ANG07, ANG09, MIS04]), el proceso asociado a la ganancia de trayecto (*tap gain* en la terminología inglesa) será un proceso Gauss-Markov lineal como el estudiado en la sección anterior. El filtro de Kalman empleado tendrá carácter escalar.

6.2.1 Particularización del modelo de planta: evolución de la ganancia de trayecto

En la sección 3.2.1.1, “Ecuación escalar para el modelo de planta”, se obtuvo una ecuación escalar genérica para el problema LQE. En este apartado, se particulariza la ecuación para la simulación monotrayecto.

Todo proceso aleatorio estacionario se puede representar como un proceso autorregresivo de infinitos trayectos ([BOX94]). Los modelos autorregresivos, en su forma general, siguen el esquema ([SAF97]) de la figura 6.2.

Los procesos autorregresivos se representan mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$\mathbf{h}_p = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{h}_{p-i} + \mathbf{w}_p \quad (6.5)$$

donde los elementos significan:

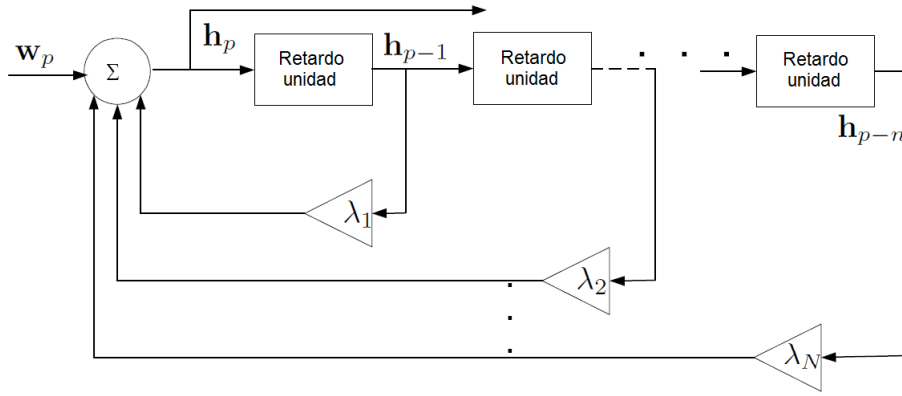


Figura 6.2: Modelo autorregresivo general

- \mathbf{h}_p un proceso gaussiano (que puede ser complejo). En el caso particular de este PFC, será un proceso real que represente la evolución de la ganancia de trayecto
- λ_i los parámetros del modelo
- N el número de retardos en el modelo autorregresivo
- $\{\mathbf{w}_p\}$ una secuencia de variables aleatorias gaussianas de media cero e idénticamente distribuidas (que pueden ser complejas)

La secuencia \mathbf{w}_p es un ruido blanco⁴ gaussiano.

Un proceso de Gauss-Markov lineal, como consecuencia de su autocorrelación exponencial, se puede describir como un proceso autorregresivo de primer orden. En otras palabras, el estado actual del proceso depende exclusivamente del estado anterior. Para un proceso de primer orden en \mathbb{R} , la ecuación en diferencias (6.5) queda reducida a:

$$\mathbf{h}_p = \lambda \mathbf{h}_{p-1} + \mathbf{w}_p \quad (6.6)$$

siendo

- \mathbf{h}_p Un proceso gaussiano que modela una ganancia de trayecto con valores reales⁵

⁴Como es sabido, el término “blanco” aplicado al ruido denota que su espectro es uniforme y no nulo a lo largo de un rango de frecuencias infinito, de manera análoga a cómo el color blanco es la suma (infinita) de todos los colores.

⁵En realidad, las ganancias de trayecto se representan habitualmente con valores complejos. La aplicación del modelo al caso con valores complejos sería análoga. Para facilitar la interpretación de los resultados, hemos realizado todos los desarrollos sobre el cuerpo de los números reales, pero de manera que se puedan extender de manera trivial a ganancias en \mathbb{C} .

λ	Una constante real; el parámetro supuesto para el modelo autorregresivo
\mathbf{w}_p	Una secuencia de variables aleatorias gaussianas (en \mathbb{R}) de media cero e idénticamente distribuidas, con varianza $\sigma_{\mathbf{w}}^2$

Si se compara la ecuación (6.6) con la ecuación (3.5) de la sección 3.2.1.1, “Ecuación escalar para el modelo de planta”, se comprueba que el proceso de Gauss-Markov lineal es una ecuación de planta para el problema LQE, cuya solución óptima, según se expuso en el capítulo 3, es el filtro de Kalman escalar.

6.2.2 Formulación del estimador de canal basado en datos

El estimador basado en datos utiliza secuencias de entrenamiento enviadas a través del canal para estimar la respuesta impulsiva del canal. A continuación, se describe cómo se realiza la estimación de canal utilizando el método de correlación.

Considérese una secuencia de entrenamiento de longitud M bits, conocida en el receptor, y que se envía a través del canal en el instante t_p (al que haremos referencia en adelante con el subíndice p). Recuérdese que se había asumido que el canal no cambia mientras se envía la secuencia de entrenamiento.

Su forma vectorial sería:

$$\underline{x}_p = [x_p^{(0)} \ x_p^{(1)} \ x_p^{(2)} \ \dots \ x_p^{(M-1)}]^T \quad (6.7)$$

Esta secuencia de bits⁶ se transforma en símbolos de energía unidad según la siguiente llave:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Bit} & \rightarrow \textit{Símbolo} \\ 0 & \rightarrow +1 \\ 1 & \rightarrow -1 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

para simular una secuencia BPSK.

En el intervalo en el que la secuencia de entrenamiento se envía a través del canal, sea la respuesta impulsiva del canal⁷:

$$\underline{\mathbf{h}}_p = [\mathbf{h}_p^{(0)} \ \mathbf{h}_p^{(1)} \ \mathbf{h}_p^{(2)} \ \dots \ \mathbf{h}_p^{(L-1)}]^T \quad (6.9)$$

⁶En la medida en que \underline{x}_p ya es conocida en el receptor, no se considera que tenga incertidumbre. Por este motivo, no se considera de naturaleza aleatoria y no se resalta en negrita.

⁷En general, la respuesta impulsiva del canal tendrá carácter aleatorio. En esta simulación, además, la aleatoriedad es explícita, pues cada $\mathbf{h}_p^{(i)}$ seguirá un modelo GML. De ahí la negrita.

donde L es la longitud de la respuesta impulsiva del canal⁸.

Por consiguiente, la señal recibida será la convolución de la señal enviada y la respuesta impulsiva más el ruido del canal:

$$\underline{\mathbf{y}}_p = \underline{x}_p * \underline{\mathbf{h}}_p + \underline{\mathbf{n}}_c \quad (6.10)$$

La convolución viene dada por:

$$\mathbf{y}_p^{(n)} = \sum_{m=0}^{L-1} \mathbf{h}_p^{(m)} x_p^{(n-m)} + \mathbf{n}_c^{(n)} \quad (6.11)$$

donde el superíndice entre paréntesis indica la posición del elemento en el vector respectivo (por ejemplo, $\mathbf{y}_p^{(n)}$ es el elemento n -ésimo del vector aleatorio $\underline{\mathbf{y}}_p$). La ecuación (6.11) también se puede escribir en forma matricial:

$$\underline{\mathbf{y}}_p = \begin{bmatrix} x_p^{(0)} & 0 & \cdot & 0 \\ x_p^{(1)} & x_p^{(0)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & x_p^{(1)} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_p^{(0)} \\ x_p^{(M-1)} & \cdot & \cdot & x_p^{(1)} \\ 0 & x_p^{(M-1)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & x_p^{(M-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_p^{(0)} \\ \mathbf{h}_p^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{h}_p^{(L-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_c^{(0)} \\ \mathbf{n}_c^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{n}_c^{L+M-2} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

La ecuación (6.12) se puede reescribir de esta manera:

$$\underline{\mathbf{y}}_p = \mathbf{X}_p \cdot \underline{\mathbf{h}}_p + \underline{\mathbf{n}}_c \quad (6.13)$$

$\underline{\mathbf{y}}_p$	La señal recibida correspondiente al “instante” ⁹ t_p , representada mediante un vector aleatorio de dimensiones $(L + M - 1) \times 1$.
\mathbf{X}_p	La matriz de Toeplitz de tamaño $(L + M - 1) \times L$ que contiene las versiones retardadas de la secuencia de entrenamiento enviada.
$\underline{\mathbf{h}}_p$	La respuesta impulsiva del canal, representada mediante un vector aleatorio de dimensiones $L \times 1$.
$\underline{\mathbf{n}}_c$	El AWGN de media cero y varianza σ_c^2 , representado como vector aleatorio de dimensiones $(L + M - 1) \times 1$.

⁸L se puede interpretar también como el número de trayectos/*taps*/ganancias de tap/procesos GML a seguir.

⁹Se trata más bien del lapso de duración τ asociado al instante t_p .

Si se parte de una energía de bit unitaria $E_b = 1$, la SNR del canal viene dada por:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{2\sigma_c^2} \quad (6.14)$$

Siguiendo el método de regresión lineal general dado en [SHA88], la estimación del canal viene dada por:

$$\hat{\underline{\mathbf{h}}}_p = (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T \mathbf{y}_p) \quad (6.15)$$

6.2.3 Particularización del modelo de observación

En la sección 3.2.2.1, “Ecuación escalar para el modelo de observación”, se obtuvo una ecuación de observación para el problema LQE. En este apartado, se particulariza la ecuación para las simulaciones monotrayecto y multitrayecto de este PFC. Para ello, nos basaremos en el estimador de canal definido en el apartado anterior.

Lo primero que debemos considerar es que, en el receptor, ese estimador basado en secuencias de entrenamiento produce “estimas” del proceso cuyo error podemos calcular. Si introducimos la expresión de la señal recibida (con ruido y distorsionada) de la ecuación (6.13) en la ecuación (6.15), obtenemos la expresión:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{h}}}_p &= (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T \mathbf{y}_p) = (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T (\mathbf{X}_p \cdot \underline{\mathbf{h}}_p + \underline{\mathbf{n}}_c)) = \\ &= (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p) \cdot \underline{\mathbf{h}}_p + (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T \underline{\mathbf{n}}_c) = \underline{\mathbf{h}}_p + (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T \underline{\mathbf{n}}_c) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Así, el error de estimación es:

$$\tilde{\underline{\mathbf{h}}}_p = \hat{\underline{\mathbf{h}}}_p - \underline{\mathbf{h}}_p = (\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p)^{-1} (\mathbf{X}_p^T \underline{\mathbf{n}}_c) \quad (6.17)$$

En consecuencia, dado que $\underline{\mathbf{n}}_c$ tiene como media el vector nulo, $\hat{\underline{\mathbf{h}}}_p$ es un estimador insesgado. Por consiguiente, las estimas se pueden considerar como lecturas ruidosas del proceso (o sea, como mediciones de la ganancia de trayecto distorsionadas por un AWGN).

La varianza del error del estimador escalar $\hat{\underline{\mathbf{h}}}_p$, según cálculos similares ([SHA88, SAF97]), sería:

$$P_{\hat{\underline{\mathbf{h}}}_p} = \frac{\sigma_c^2}{M} \quad (6.18)$$

Estamos ya en condiciones de proponer el modelo de observación genérico multitrayecto:

$$\underline{\mathbf{z}}_p = \underline{\mathbf{h}}_p + \underline{\mathbf{v}} \quad (6.19)$$

siendo

$\underline{\mathbf{z}}_p$ La medición \mathbf{z} asociada al instante t_p . Esta medición es, en realidad, la estimación de \mathbf{h}_p basada en datos (secuencias de entrenamiento).

$\underline{\mathbf{h}}_p$ El proceso GML que representa la ganancia (real) de los trayectos del canal.

$\underline{\mathbf{v}}$ El ruido de medición o error de la estimación basada en datos, representada como vector aleatorio.

El caso monotrayecto exige que la ecuación (6.19) abandone su forma vectorial en favor de valores escalares:

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{h}_p + \mathbf{v} \quad (6.20)$$

En ese caso, el ruido escalar \mathbf{v} tendría varianza:

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2 = \frac{\sigma_c^2}{M} \quad (6.21)$$

Si se compara esta ecuación con la ecuación (3.7), se puede observar que la sensibilidad de la medición es la identidad; esto se debe a que el estimador basado en datos es insesgado según (6.17).

6.2.4 Parámetros de la simulación monotrayecto

A continuación, se presentan los parámetros del canal y de la transmisión que se utilizarán en esta primera simulación. La ecuación del sistema, que es un modelo de Gauss-Markov lineal definido por la ecuación (6.1) o la ecuación equivalente (6.6), tendrá un parámetro¹⁰ $\lambda = 0,9$, con lo cual la ecuación de planta¹¹ (o de canal) quedará¹²:

¹⁰Aquí ponemos $\lambda = 0,9$ como ejemplo. En realidad, se realizarán simulaciones con varios parámetros siguiendo el mismo método.

¹¹Las expresiones “ecuación de planta” o “modelo de planta” se utilizan en filtrado de Kalman debido a sus aplicaciones originales, referidas a plantas o instalaciones industriales. Aunque mantenemos la denominación habitual, en este caso el modelo de planta es, obviamente, un modelo de canal.

¹²Nótese que desaparece el superíndice k , que denota el número de trayecto, porque estamos particulizando el modelo general al caso de un canal monotrayecto.

$$\mathbf{h}_p = 0,9\mathbf{h}_{p-1} + \mathbf{w}_p \quad (6.22)$$

La ecuación de observación será la ecuación (6.20).

Por este canal monotrayecto se transmitirían $R_F = 5 \times 10^4$ tramas de entrenamiento con $M = 10$ bits por trama. Típicamente, para la aplicación última de esta investigación (OFDM), existen tramas de entrenamiento y subcanales piloto (que solo transmiten tramas de entrenamiento), además de tramas de información. Sin embargo, a los efectos de esta simulación consideraremos que no se transmite ninguna información, solo tramas de entrenamiento (y que hay un solo subcanal, ya que estamos en un entorno monotrayecto). El canal se asume invariante durante esos M bits.

Partiremos de una energía de señal normalizada ($E_b = 1$) y una relación de señal a ruido de:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_b}{2\sigma_c^2} = 6 \text{ dB} \quad (6.23)$$

de donde se deduce que $\sigma_c^2 \approx 0,1256$. La varianza del estimador basado en datos (que interpretamos como el ruido de la muestra recibida) sería:

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma_c^2}{M} \approx 0,01256$$

La varianza σ_w^2 del ruido de proceso \mathbf{w}_p que genera la evolución de la ganancia de trayecto se establece¹³ en:

$$\sigma_w^2 = 2\sigma_v^2 \approx 0,026 \quad (6.24)$$

6.2.5 Ecuaciones que definen el filtro de Kalman para el seguimiento monotrayecto

De conformidad con lo expuesto en los apartados anteriores y el capítulo 3, se puede encontrar un filtro de Kalman estándar (con carácter escalar) para realizar un seguimiento del modelo de Gauss-Markov lineal (la ganancia de trayecto). A continuación se presentan las ecuaciones y el algoritmo correspondientes (sobre la base de [AND01, CHU99, SAF97, GRE93, SHA88]). En caso de dudas, se recomienda consultar nuevamente el capítulo 3.

¹³La elección del parámetro σ_w^2 se debe a que favorece la explicación del modelo GML y el seguimiento Kalman. Para aplicaciones prácticas, convendría calcular la energía media del trayecto, σ_h^2 , y deducir a partir de este: $\sigma_w^2 = (1 - \lambda^2)\sigma_h^2$, tal y como se hará en las simulaciones 3 y 4.

Las condiciones iniciales del filtro son¹⁴:

$$\hat{\mathbf{h}}_0(+) = E\{\mathbf{h}_0\} = 0 \quad (6.25)$$

$$P_0(+) \geq \{\sigma_{\mathbf{w}}^2\} \quad (6.26)$$

Es decir, partimos de que el trayecto comienza con una ganancia real cero y de que esa estimación “cero”, utilizada como predicción (estimación *a priori*) para el instante siguiente, tiene una varianza igual o superior a la del ruido de proceso.

El filtrado de Kalman consistiría en aplicar recursivamente los cuatro pasos indicados en el apartado 3.3., “Solución al problema de estimación lineal”, a saber:

6.2.5.1 Paso 1. Extrapolación de la varianza del error

La ecuación (3.13) se particulariza a:

$$P_p(-) = \lambda^2 P_{p-1}(+) + \sigma_{\mathbf{w}}^2 \quad (6.27)$$

siendo

$P_p(-)$ La varianza (escalar¹⁵) del error *a priori* en el instante t_p .

$P_{p-1}(+)$ La varianza (escalar) del error *a posteriori* en el instante t_p .

6.2.5.2 Paso 2. Actualización de la estimación del estado

Particularizando la expresión (3.14), la ganancia de Kalman viene dada por:

$$\bar{\kappa}_p = \frac{P_p(-)}{P_p(-) + \sigma_{\mathbf{v}}^2} \quad (6.28)$$

6.2.5.3 Paso 3: Actualización de la varianza del error

La ecuación de actualización (3.15) se particulariza a:

$$P_p(+) = (1 - \bar{\kappa}_p)P_p(-) \quad (6.29)$$

¹⁴No es estrictamente necesario que el filtro comience en cero. Dependiendo de cómo se modele el proceso, es posible que la esperanza del valor a estimar ya sea distinta de cero en el momento en el que el filtro de Kalman empiece a funcionar. Se asume el cero inicial porque es intuitivo y práctico.

¹⁵La mayúscula en letra redonda matricial es un abuso de notación para evitar que se confunda con una medida de probabilidad p o P .

6.2.5.4 Paso 4. Cálculo de la estimación y recursión

Particularizando la ecuación (3.16), obtenemos la expresión:

$$\hat{\mathbf{h}}_p(+) = \hat{\mathbf{h}}_p(-) + \bar{\kappa}_p(\mathbf{z}_p - \hat{\mathbf{h}}_p(-)) \quad (6.30)$$

Los cuatro pasos se pueden implementar recursivamente teniendo en cuenta que, al tomar esperanzas en la ecuación (6.6), resulta que la predicción, o estimación *a priori*, del proceso en el instante posterior, queda determinada mediante:

$$\hat{\mathbf{h}}_{p+1}(-) = \lambda \hat{\mathbf{h}}_p(+) \quad (6.31)$$

6.2.6 Algoritmo de seguimiento implementado

El algoritmo de filtrado de Kalman implementado para la estimación de canal se presenta a continuación como pseudocódigo. en el que se ha asumido $\lambda = 0,9$.

Inicialización. Tiempo inicializado como instante $p=1$

$$P_1(-) = 1$$

// Se asume 1 como varianza del error de predicción inicial

$$\hat{\mathbf{h}}_1(-) = 0$$

// Se asume 0 como predicción inicial

Bucle{

Realizar la estimación basada en datos, esto es, obtener la estimación del canal mediante regresión lineal, esto es, obtener:

$$\mathbf{z}_p$$

Calcular la ganancia de Kalman

$$\bar{\kappa}_p = \frac{P_p(-)}{P_p(-) + \sigma_v^2}$$

Calcular la estima a posteriori:

$$\hat{\mathbf{h}}_p(+) = \hat{\mathbf{h}}_p(-) + \bar{\kappa}_p(\mathbf{z}_p - \hat{\mathbf{h}}_p(-))$$

Calcular la varianza actualizada del error:

$$P_p(+) = (1 - \bar{\kappa}_p)P_p(-)$$

Calcular la predicción (estimación a priori):

$$\hat{\mathbf{h}}_{p+1}(-) = 0,9\hat{\mathbf{h}}_p(+)$$

Calcular la varianza del error de la predicción/estimación a priori:

$$\mathbf{P}_p(-) = (0,9)^2\mathbf{P}_{p-1}(+) + \sigma_{\mathbf{w}}^2$$

El tiempo avanza un instante:

$$p \leftarrow p + 1$$

}Fin del bucle

6.2.7 Resultados

La figura 6.3 muestra el seguimiento de un proceso de Gauss-Markov (línea azul) mediante el filtro de Kalman (línea verde) y mediante regresión lineal (o sea, la “medición” ruidosa \mathbf{z}_p sin modificar, bolas rojas) a lo largo de 50 instantes de tiempo (50 tramas de entrenamiento) para $\lambda = 0,99$.

Aunque no se aprecia claramente en la figura, la línea verde se acerca a las bolas rojas, pero no llega a tocar su centro; esto se corresponde con una ganancia de Kalman muy próxima a 1, pero no igual a 1. En efecto, un gran número de simulaciones realizadas (por un total de cientos de miles de iteraciones) confirman que el filtro de Kalman converge con bastante rapidez, y siempre al valor de ganancia de Kalman $\bar{\kappa} = 0,9091$. En la figura 6.3 se observa que, aunque ambos métodos siguen de cerca la evolución del canal monotrayecto, el filtro de Kalman ofrece un seguimiento más próximo al canal real, esto es, su estimación es mejor. Después de una simulación de 50.000 iteraciones, el error cuadrático medio del filtro de Kalman fue de $1,0585 \times 10^{-3}$ frente a un error del estimador \mathbf{z}_p (basado en datos/regresión lineal) de $1,2446 \times 10^{-3}$, lo cual supone una mejora media (reducción media del error cuadrático medio) del 14,95 %.

Llegados a este punto, puede resultar interesante repetir la simulación con otros valores de λ para observar cómo afecta eso al rendimiento del filtro de Kalman. Teóricamente, a menor λ , más rápido (*ceteris paribus*) varía el canal, luego más le costaría al filtro de Kalman seguirlo (no así a la regresión lineal, que depende exclusivamente de cada muestra). Veamos si las simulaciones respaldan esta idea.

La figura 6.4 muestra el seguimiento monotrayecto con $\lambda = 0,9$. La ganancia de Kalman vuelve a converger a $\bar{\kappa} = 0,9091$. Después de una simulación de 50.000 iteraciones con $\lambda = 0,9$, el error cuadrático medio del filtro de Kalman fue de

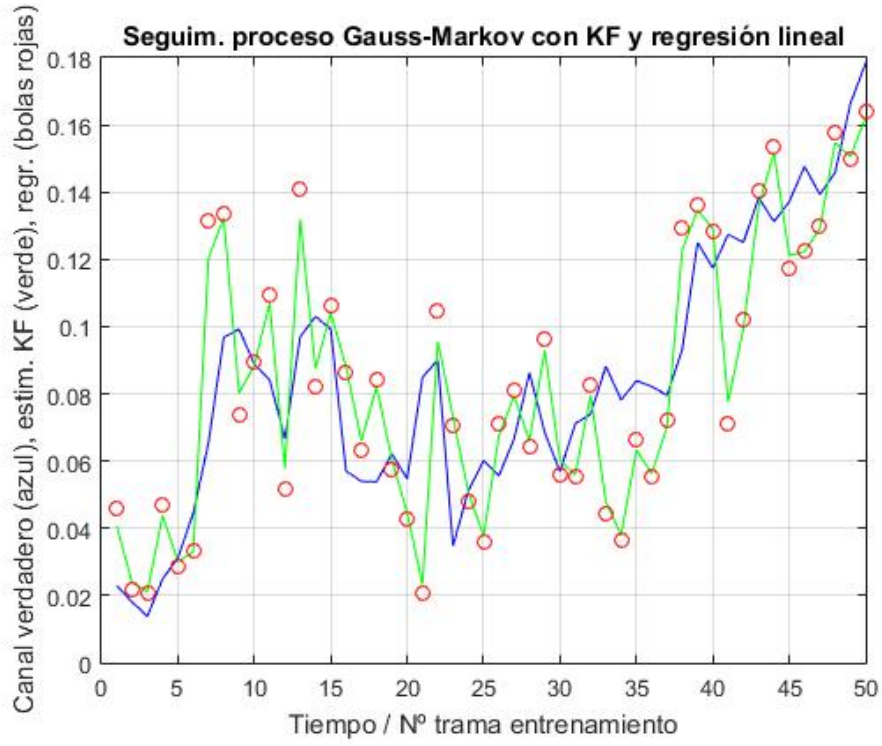


Figura 6.3: Seguimiento de canal monotrayecto para $\lambda = 0,99$ y SNR=6 dB.

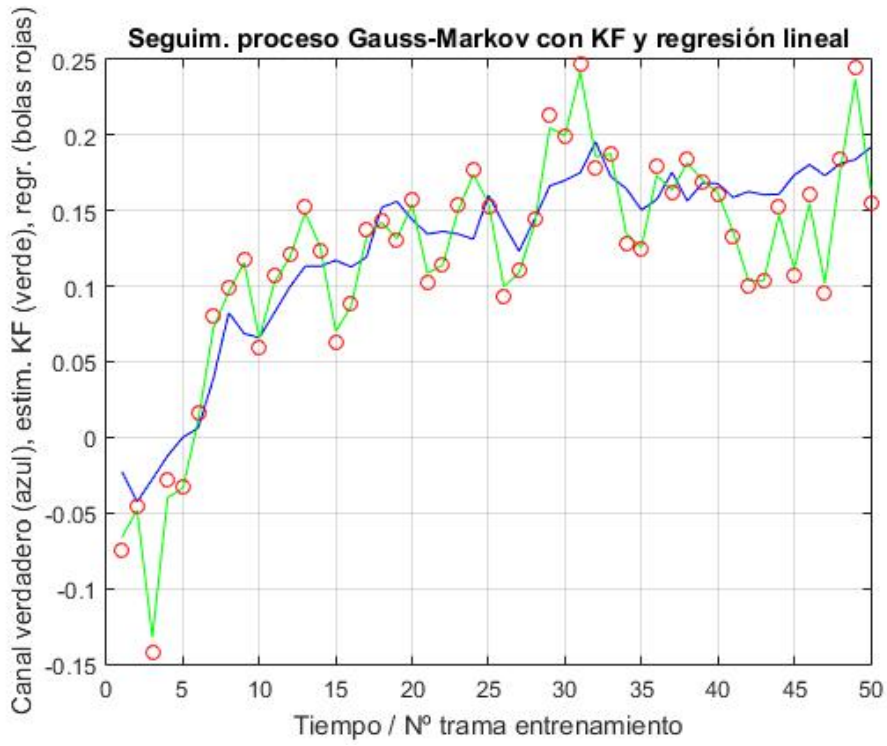


Figura 6.4: Seguimiento de canal monotrayecto para $\lambda = 0,9$ y SNR=6 dB.

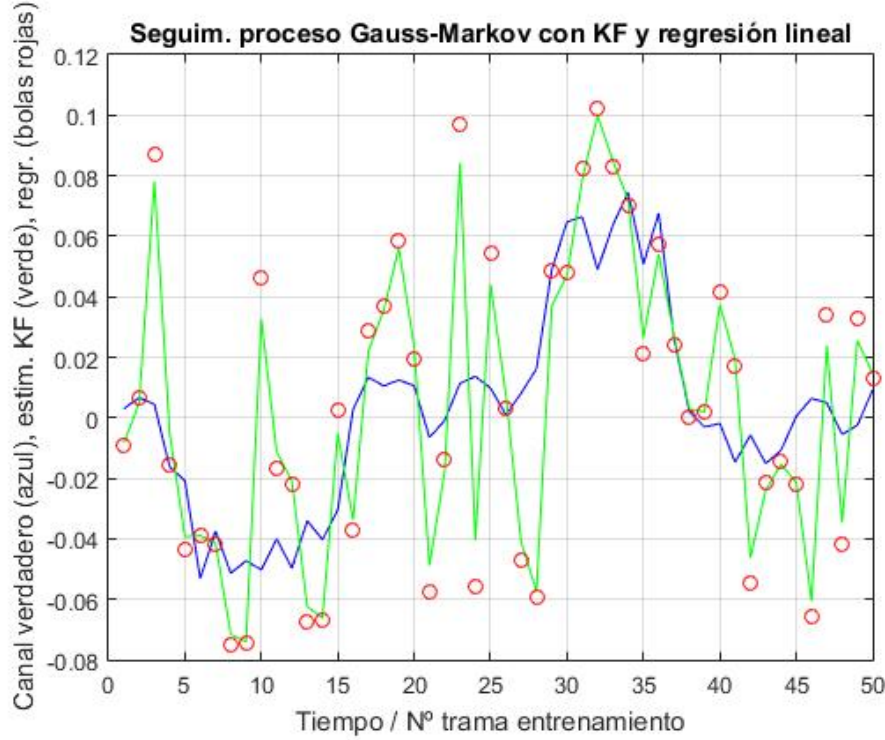


Figura 6.5: Seguimiento de canal monotrayecto para $\lambda = 0,999$ y $\text{SNR}=6$ dB.

$1,2334 \times 10^{-3}$ frente a un error del estimador \mathbf{z}_p (basado en datos/regresión lineal) de $1,2375 \times 10^{-3}$, lo cual implica que el filtro de Kalman, aun siendo mejor, solo presentó una mejora del 0,0033 %. Así pues, los resultados confirman que, para un λ menor, la ventaja del KF desaparece a efectos prácticos.

Veamos si el recíproco es cierto simulando el canal con $\lambda = 0,999$. Una vez más, la ganancia de Kalman converge a $\bar{\kappa} = 0,9091$. Después de una simulación de 50.000 iteraciones con $\lambda = 0,999$, el error cuadrático medio del filtro de Kalman fue de $1,0416 \times 10^{-3}$ frente a un error del estimador \mathbf{z}_p de $1,2479 \times 10^{-3}$, lo cual implica que el filtro de Kalman obtuvo un resultado un 16,53 % mejor. La figura 6.5 confirma los resultados, y deja claro que el canal es prácticamente estático¹⁶. Aunque las tres gráficas son muy similares, una observación detenida del rango barrido por el canal verdadero (línea azul) permite apreciar el efecto que tiene λ sobre la velocidad de variación del canal.

¹⁶Tal y como debe ser. Como recuerdan en [MIS04], el parámetro λ mide lo rápido que varía el canal: $\lambda = 0$ se corresponde con la variación de muestras de canal i. i. d.; y $\lambda = 1$, con un canal estático.

Capítulo 7

Simulación 2: Kalman multitrayecto

Banco de filtros de Kalman para seguimiento multitrayecto OFDM

Una vez analizado el modelo de Gauss-Markov lineal y el seguimiento monotrayecto mediante KF en la simulación anterior, en este capítulo ampliaremos la investigación con un modelo OFDM simplificado y un banco de filtros de Kalman para realizar el seguimiento de un canal multitrayecto. Se explicará que este modelo es equivalente a N seguimientos monotrayecto, y se presentarán los resultados de la simulación.

7.1 Modelo OFDM simplificado

Se ha aplicado un modelo OFDM de tiempo discreto como el explicado en el apartado 2.4, “Modelo de tiempo discreto”, de banda base, con $N=3$ trayectos, donde en cada instante solo se envía una secuencia de entrenamiento de $M=10$ bits (modulada según BPSK) conocida en el receptor. En virtud de la ecuación (2.15) y la figura 2.5, nuestro modelo de transmisión OFDM equivale a $N=3$ transmisiones diferentes por subcanales monotrayecto distintos. Cada uno de esos trayectos sigue un modelo GML como el explicado en el apartado 6.1, “Modelo de Gauss-Markov lineal”, manteniéndose la simplificación de que cada trayecto tiene una ganancia real¹ que evoluciona según un GML que comparte el mismo parámetro λ con los demás *taps* del multitrayecto.

Cabe destacar que en los modelos empíricos de canal, la ganancia de trayecto

¹Los trayectos empíricos presentan ganancias complejas. La simplificación a ganancias reales no supone una pérdida de generalización (pues todos los cálculos y las simulaciones se podrían realizar de manera análoga, con pequeñísimos cambios de implementación) pero ayuda a mantener las explicaciones y, sobre todo, las gráficas, en un nivel más intuitivo.

decae exponencialmente con el tiempo. Esto es, el tercer *tap* típicamente proporciona una señal mucha más atenuada que el primer *tap*. En general, esto no será así en este modelo OFDM simplificado, en el que se pretende mantener todo en un nivel intuitivo que permita hacer comparaciones válidas entre el caso monotrayecto y el caso multitrayecto.

7.2 Banco de filtros de Kalman

En la recepción, una vez obtenida una estimación MMSE de las ganancias de canal en el dominio de la frecuencia, se recupera el equivalente en el dominio del tiempo (esto es, las ganancias de *tap* provenientes de la estimación por MMSE) mediante la Transformada de Fourier Inversa.

Ahora, en vez de seguir un solo trayecto con un filtro de Kalman, tendremos que seguir tres trayectos diferentes con tres filtros de Kalman distintos, cada uno de los cuales será similar al de la primera simulación: cada uno recibirá una medida distorsionada $\mathbf{z}_p^{(k)}$ (la ganancia del *tap* k -ésimo estimada según la estimación MMSE) y un modelo teórico GML con un parámetro λ compartido. Cada filtro irá calibrando el peso con que pondera cada una de estas fuentes de información, hará sus propias predicciones, etc.

7.3 Resultados de la simulación

Se realizaron simulaciones para tres valores de λ . Como cabía esperar, los resultados fueron virtualmente idénticos al caso monotrayecto. Los resultados respectivos se detallan en los apartados siguientes.

7.3.1 $\lambda_1 = 0,99$

Los resultados de ganancia de Kalman, el error cuadrático medio de KF y el de la regresión lineal, son prácticamente idénticos al caso monotrayecto con el mismo parámetro λ_1 .

Un gran número de simulaciones realizadas (por un total de cientos de miles de iteraciones) confirman que cada filtro de Kalman del banco converge con bastante rapidez, y siempre al valor de ganancia de Kalman $\bar{\kappa} = 0,9091$ (el mismo que en la simulación 1). Después de una simulación de 50.000 iteraciones, el error cuadrático medio del banco de filtros de Kalman fue de $1,0719 \times 10^{-3}$ frente a un valor de $1,2606 \times 10^{-3}$ para la estimación sin KF. Por tanto, el KF multitrayecto obtuvo una

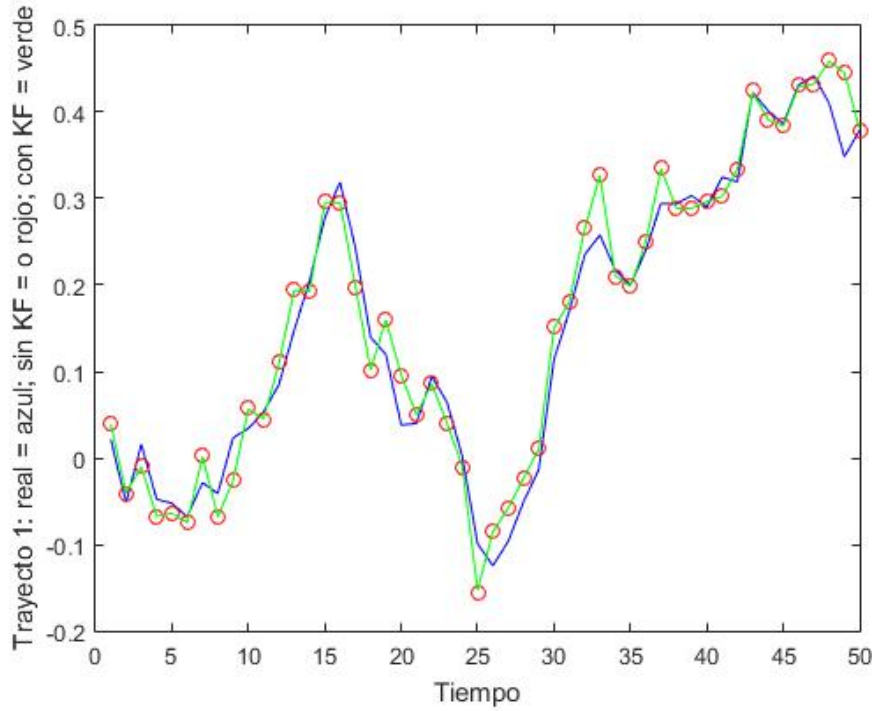


Figura 7.1: Seguimiento del primer trayecto para $\lambda_1 = 0,99$.

mejora (reducción del error cuadrático medio) del 14,97 % respecto del estimador \underline{z}_p (basado en datos/regresión lineal). Se trata de una mejora idéntica, a todos los efectos prácticos, a la de la simulación monotrayecto (donde reducía el error cuadrático medio un 14,95 %).

En las figuras 7.1, 7.2 y 7.3, se observa la ganancia de trayecto real (línea azul), la estimación MMSE (círculos rojos) y la estimación mediante filtro de Kalman (línea verde) para cada uno de los tres trayectos simulados. Los trayectos no presentan ninguna clara diferencia; en efecto, la posición de cada trayecto es irrelevante en nuestro modelo.

7.3.2 $\lambda_2 = 0,9$

De nuevo, los resultados de ganancia de Kalman, el error cuadrático medio de KF y el de la regresión lineal, son virtualmente idénticos al caso monotrayecto con el mismo parámetro λ_1 .

Varias simulaciones realizadas muestran que cada filtro de Kalman del banco converge con bastante rapidez, y siempre al valor de ganancia de Kalman $\bar{\kappa} = 9091$ (el mismo que en la simulación 1 y que en el apartado anterior). Después de una simulación de 50.000 iteraciones, el error cuadrático medio del banco de filtros de Kalman fue de $1,2432 \times 10^{-3}$ frente a un valor de $1,2591 \times 10^{-3}$ para la estima previa al KF.

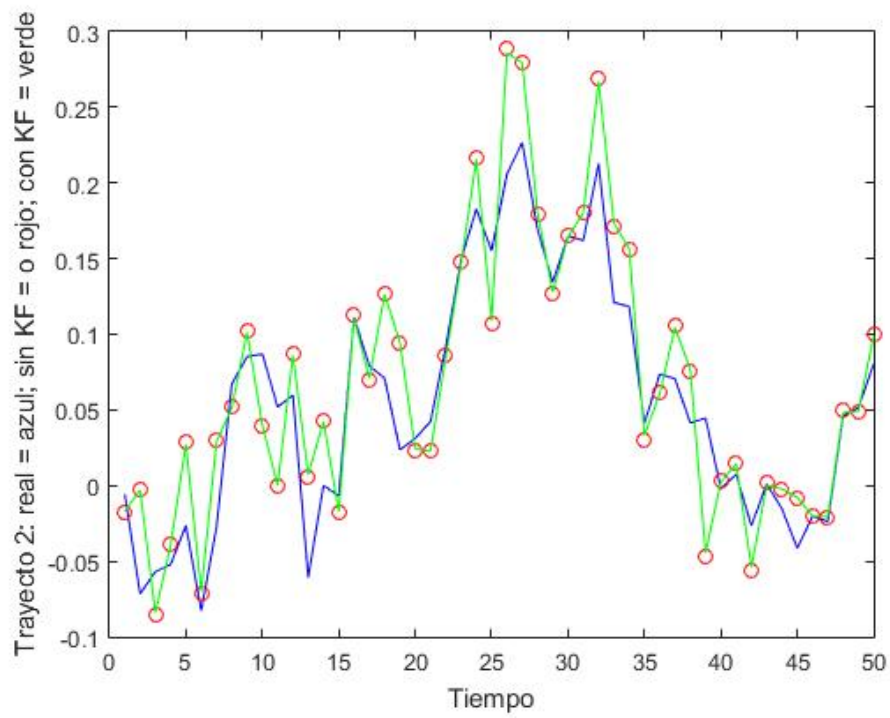


Figura 7.2: Seguimiento del segundo trayecto para $\lambda_1 = 0,99$.

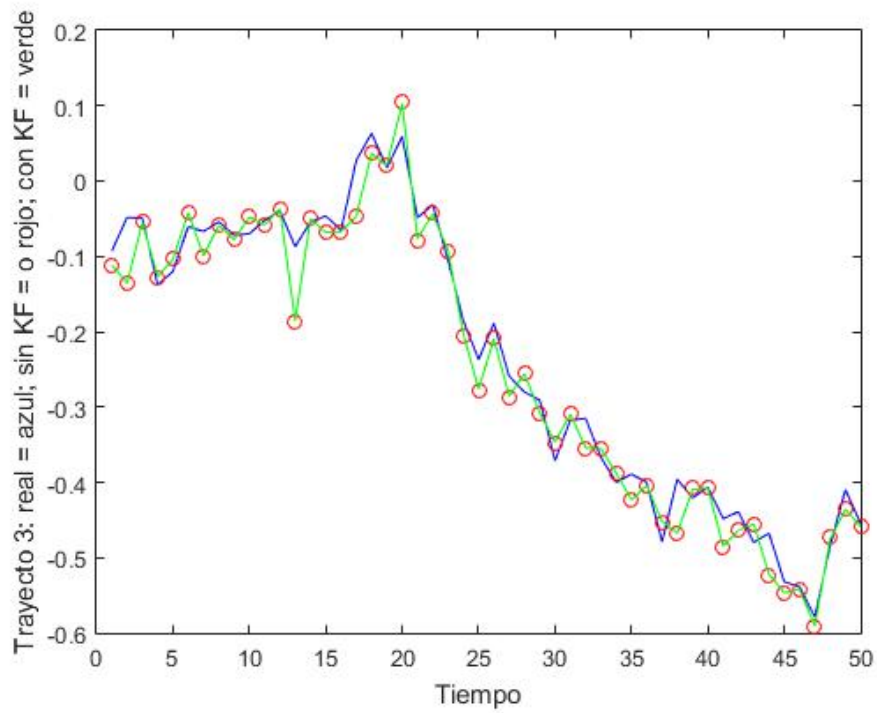


Figura 7.3: Seguimiento del tercer trayecto para $\lambda_1 = 0,99$.

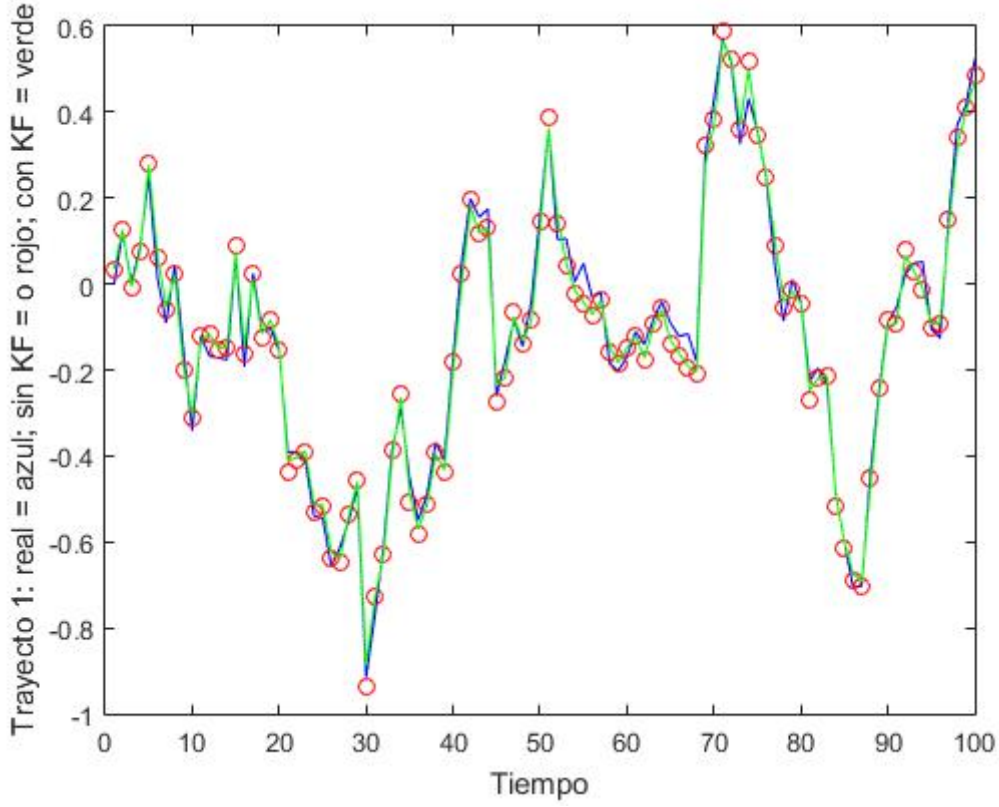


Figura 7.4: Seguimiento del primer trayecto para $\lambda_2 = 0,9$

Por tanto, el KF multitrayecto obtuvo una mejora (reducción del error cuadrático medio) del 0,0126 % respecto del estimador \underline{z}_p (basado en datos/regresión lineal). Se trata de una mejora idénticamente despreciable, a todos los efectos prácticos, a la de la simulación monotrayecto (donde se reducía el error cuadrático medio un 0,0033 %).

En la figura 7.4, se observa la ganancia de trayecto real (línea azul), la estimación sin KF (círculos rojos) y la estimación mediante KF (línea verde) para un trayecto, en un entorno OFDM simplificado, con $\lambda_2 = 0,9$. Obsérvese lo rápido que varía el canal en las primeras 100 muestras; esa rapidez en la variación, síntoma de la menor correlación temporal, perjudica al KF. En la medida en que el KF aprovecha la correlación temporal del subcanal, si esta correlación es menor, la mejora con respecto a la estimación sin KF va desapareciendo.

7.3.3 $\lambda_3 = 0,999$

Una vez más, resultados prácticamente idénticos a los de la simulación monotrayecto. Se converge nuevamente a la ganancia de Kalman $\bar{\kappa} = 0,9091$ (la mismo que en la simulación 1 y que en los dos apartados anteriores). Después de una simulación

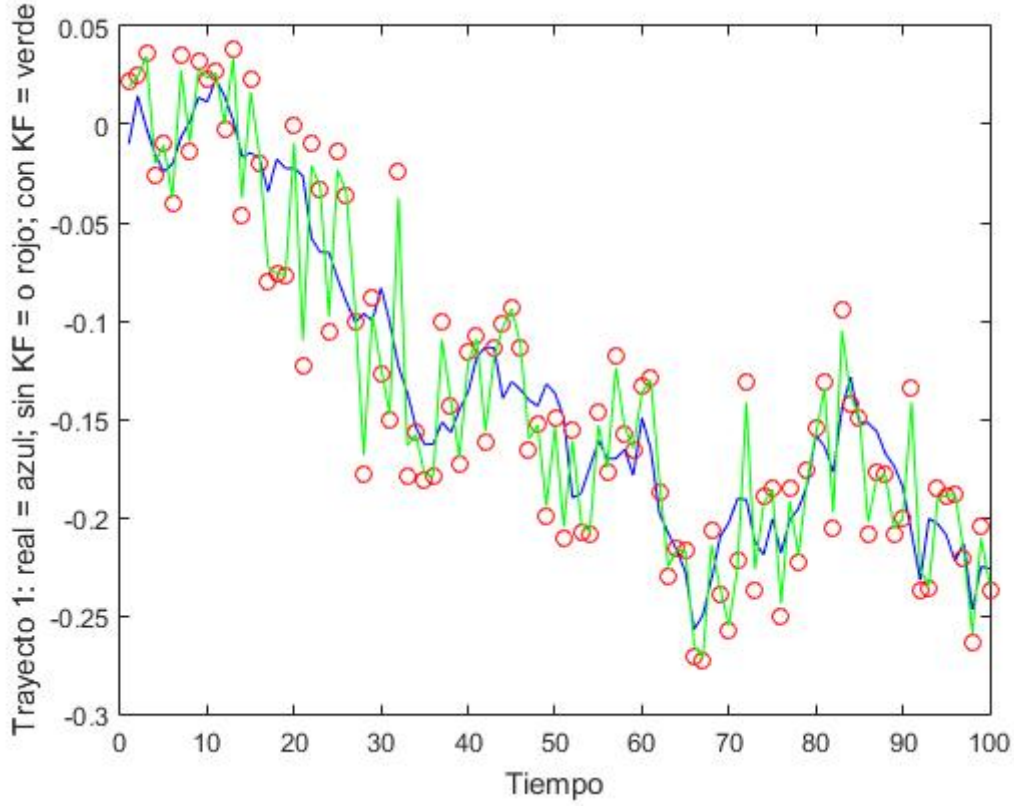


Figura 7.5: Seguimiento del primer trayecto para $\lambda_3 = 0,999$

de 50.000 iteraciones, el error cuadrático medio del banco de filtros de Kalman fue de $1,0522 \times 10^{-3}$ frente a un valor de $1,2555 \times 10^{-3}$ sin KF. Por tanto, el KF multitrayecto obtuvo una mejora (reducción del error cuadrático medio) del 16,19 % respecto del estimador \underline{z}_p (basado en datos/regresión lineal). La mejora es virtualmente idéntica a la simulación 1.

En la figura 7.4, se observa la ganancia de trayecto real (línea azul), la estimación sin KF (círculos rojos) y la estimación mediante KF (línea verde) para un trayecto, en un entorno OFDM simplificado, con $\lambda_3 = 0,999$. Obsérvese lo lento que varía el canal en las primeras 100 muestras; esa lentitud en la variación, síntoma de la mayor correlación temporal, favorece al KF. En la medida en que el KF aprovecha la correlación temporal del subcanal, si esta correlación es mayor, la mejora con respecto a la estimación sin KF va en aumento.

Capítulo 8

Simulación 3: Sensibilidad a la no linealidad

¿Cuándo degenera el rendimiento del filtro de Kalman? Exposición a distintos escenarios de nacimiento y muerte de trayectos

En las dos primeras simulaciones nos hemos centrado en escenarios completamente lineales. Sin embargo, en la realidad aparecen no linealidades debidas a diversos fenómenos. Una de las no linealidades que se ha venido estudiando en los últimos años es la referida al nacimiento y muerte de trayectos, esto es, el caso en el que no siempre hay tres trayectos fijos, o cinco trayectos fijos, etc. sino que dentro de un universo de posibilidades (un número máximo de trayectos, p. ej. $L_{máx}=5$), la ganancia de trayecto tiene un comportamiento lineal hasta que, de repente, desaparece (se anula temporalmente).

Uno puede interpretar físicamente esta situación como el hecho de que, en un edificio relativamente grande, como una universidad, se cierre de repente una puerta. El resultado es que hay un trayecto, consistente en entrar por la puerta y rebotar como eco en la pared, que deja de estar disponible. Ese trayecto desaparece.

Otra posible interpretación, más propia de comunicaciones móviles, sería que un tren o un autobús que fueran a cierta velocidad, entraran de repente en un túnel y dejaran de recibir la señal por ciertos trayectos. En el caso de un país montañoso, como Suiza o algunas partes de España, el nacimiento y la muerte de trayectos serían relativamente frecuentes.

Esto introduce un factor no lineal que podría perjudicar gravemente a las prestaciones del filtro de Kalman. Típicamente, el filtro de Kalman tarda varias muestras

en realizar aproximaciones sucesivas a la nueva situación y “encontrar el cero” en el caso de la muerte del trayecto, o bien “captar de nuevo la señal” cuando el trayecto resurge.

Es posible que estos factores no cuenten demasiado a la hora de calcular la tasa de error de bits; sin embargo, es cierto que pueden introducir un error cuadrático medio importante. En la simulación de este capítulo, pretendemos estudiar cómo se comporta el filtro de Kalman ante distintos escenarios de nacimiento y muerte de trayectos, y, en concreto, trataremos de averiguar si el filtro de Kalman pierde su ventaja (en todo o en parte) a partir de algún valor de P_{birth} (la probabilidad de nacimiento de un trayecto muerto) o P_{death} (la probabilidad de muerte de un trayecto vivo).

8.1 Estructura de la simulación

La simulación parte de una estructura similar a la simulación 2, con ciertas diferencias importantes: ahora SNR=10 dB, $\sigma_h^2 = 0,25$, y, además, se introduce una no linealidad en la evolución del canal. En cada instante, cada trayecto puede desaparecer (dar un salto hasta la ganancia cero) con probabilidad P_{death} . Si el trayecto ya está muerto (tiene una ganancia nula), puede revivir, adoptando¹ un valor aleatorio² $\mathbf{h}_p^{(k)} \in (-0,9; +0,9)$, con probabilidad P_{birth} .

Igual que en la simulación anterior, el receptor obtiene una lectura (estimación por regresión lineal) distorsionada en el dominio de la frecuencia, la pasa a tiempo mediante Transformada de Fourier Inversa, y luego un banco de filtros de Kalman adecuadamente calibrados trata de seguir la componente lineal. Probando con distintos valores de P_{birth} y P_{death} (esto es, aumentando o reduciendo la no linealidad del proceso) veremos cómo se comporta el filtro de Kalman y qué sensibilidad presenta a este tipo de no linealidad.

Se realizaron diversas pruebas. Primero, para distintos valores de $P_{birth} = P_{death}$, se ejecutó la simulación OFDM durante el envío de 10.000 tramas de entrenamiento, manteniéndose constante el parámetro $\lambda_1 = 0,999$. Posteriormente, se repitió la misma prueba pero ahora con probabilidades asimétricas: $P_{birth} = 0,25$ y P_{death}

¹Que el valor aleatorio se simule como una uniforme es pura convención. Sería asumible utilizar también muchas otras distribuciones aleatorias, como una gaussiana centrada en cero y de varianza la energía media del trayecto σ_h^2 , o bien valores basados en un determinado modelo físico de nacimiento y muerte de canales, como modelos basados en el seno, triangulaciones, cuasi escalones trapezoidales con nivel superior fijo, etc.

²No se escoge el intervalo $[1, 1]$ para el valor aleatorio con el fin de reducir la probabilidad de que la ganancia de trayecto supere la unidad, $|\mathbf{h}_p^{(k)}| > 1$

$P_{birth} = P_{death}$	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
0 %	3,6102	5,0807	28,9428 %
1 %	3,6291	5,0016	27,4410 %
2,5 %	3,6977	4,9491	25,2859 %
5 %	3,9191	4,9978	21,5836 %
10 %	4,3882	4,9667	11,6492 %
15 %	4,8279	4,9873	3,1950 %
20 %	5,1051	5,0248	-1,5980 %
25 %	5,5963	5,0381	-11,0785 %

Tabla 8.1: Resultados de la prueba 1.

tomó distintos valores³. Las otras cuatro pruebas consistieron en repetir el mismo proceso para los parámetros $\lambda_2 = 0,99$ y $\lambda_3 = 0,95$.

8.2 Resultados

En todas las simulaciones, los filtros de Kalman convergieron a una ganancia de Kalman $\bar{\kappa} = 0,8333$. En general, la introducción de la no linealidad redujo la ventaja del filtro de Kalman respecto de la estimación sin KF; esa ventaja en error cuadrático medio (MSE) se reduce moderadamente para probabilidades P_{death} bajas ($< 2,5$ %), se anula del todo para probabilidades P_{death} altas (en torno al 15 %) y se invierte en casos de P_{death} extremadamente alta, donde la estimación sin KF resulta superior a la estimación con KF. Si bien la tendencia está presente en todas las pruebas, la degradación del KF es más rápida cuanto menor es λ . A continuación, se presentan los resultados correspondientes a cada prueba, seguidos de un apartado final con las conclusiones globales.

8.2.1 Prueba 1: λ_1 y $P_{birth} = P_{death}$

En la tabla 8.1 se muestran los resultados (error cuadrático medio con y sin KF) de las simulaciones para $\lambda_1 = 0,999$ y para distintas probabilidades de nacimiento y muerte de trayectos. La mejora del KF es bastante robusta para probabilidades no muy altas. Para $P_{birth} = P_{death} = 5$ %, el KF mantiene tres cuartas partes de su ventaja.

³De esta manera, evitamos dar demasiada importancia a la “linealidad extra” que se origina cuando un trayecto se queda en cero durante demasiado tiempo; en un caso extremo, esta “linealidad extra” podría llegar a compensar e incluso superar el efecto (en MSE) de la no linealidad introducida, a pesar de que apenas tenga efecto en términos de tasa de error binario y, por tanto, en aplicaciones prácticas. Al reducir el tiempo que permanece muerto un trayecto, estamos poniendo el foco en las transiciones, donde medir y reducir el MSE resultaría más interesante.

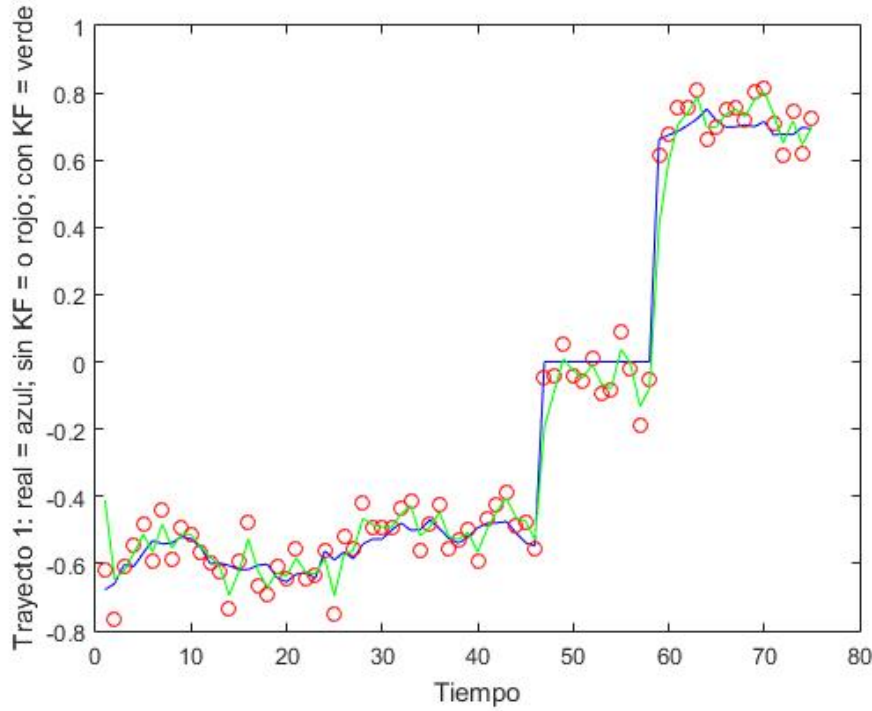


Figura 8.1: Prueba 1. Seguimiento del primer trayecto con $\lambda_1 = 0,999$ y $P_{birth} = P_{death} = 5\%$.

En las figuras 8.1, 8.2 y 8.3 se muestran el canal real (línea azul) y el seguimiento del canal con KF (línea verde) y sin KF (círculo rojo) de los trayectos primero, segundo y tercero (respectivamente) para $\lambda_1 = 0,999$ y $P_{birth} = P_{death} = 5\%$ durante 75 instantes/tramas enviadas. Estas gráficas permiten constatar la robustez del KF para los parámetros citados, así como la gran ventaja que el KF tiene respecto de la estimación por regresión lineal sin KF en los trayectos muertos. En efecto, el KF se mantiene en cero mientras que la estima sin KF acumula errores. En ese sentido, la linealidad de los trayectos muertos está compensando la no linealidad de los nacimientos; de ahí la importancia de simular probabilidades de muerte y nacimiento asimétricas, como haremos en la prueba 2.

8.2.2 Prueba 2: λ_1 y $P_{birth} = 25\%$

En la tabla 8.2 se muestran los resultados (error cuadrático medio con y sin KF) de las simulaciones para $\lambda_1 = 0,999$, $P_{birth} = 25\%$ y distintas probabilidades de muerte de trayectos. La mejora del KF ya no es tan robusta como en la prueba 1. Para $P_{death} = 5\%$, el KF ha perdido aproximadamente la mitad de su ventaja.

La figura 8.4 muestra el seguimiento del primer trayecto para $P_{death} = 5\%$. Como se puede apreciar en ella, ahora los intervalos en los que el trayecto está desaparecido

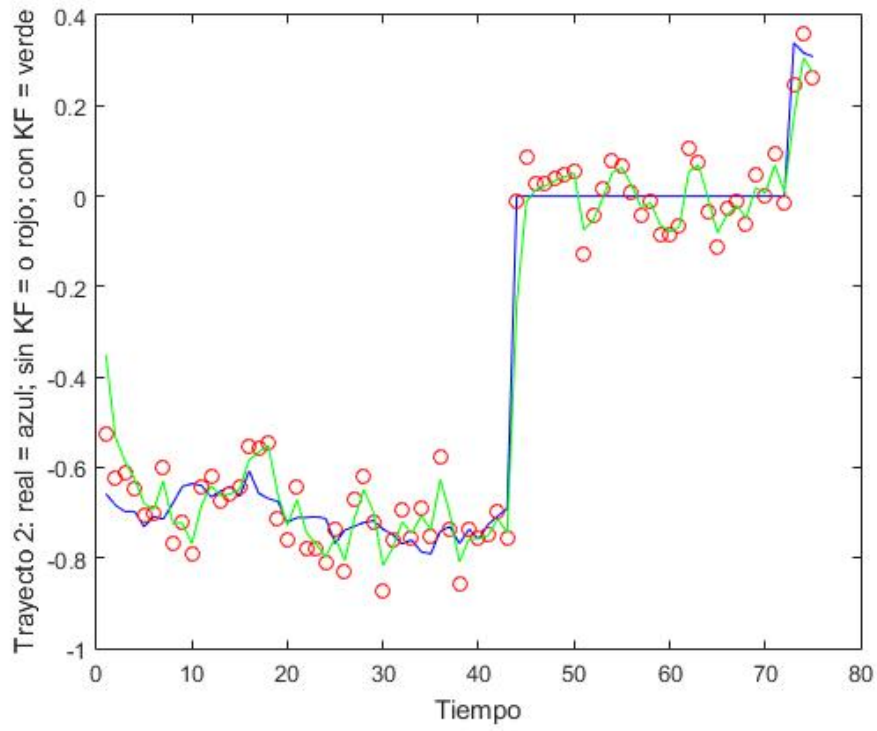


Figura 8.2: Prueba 1. Seguimiento del segundo trayecto con $\lambda_1 = 0,999$ y $P_{birth} = P_{death} = 5\%$.

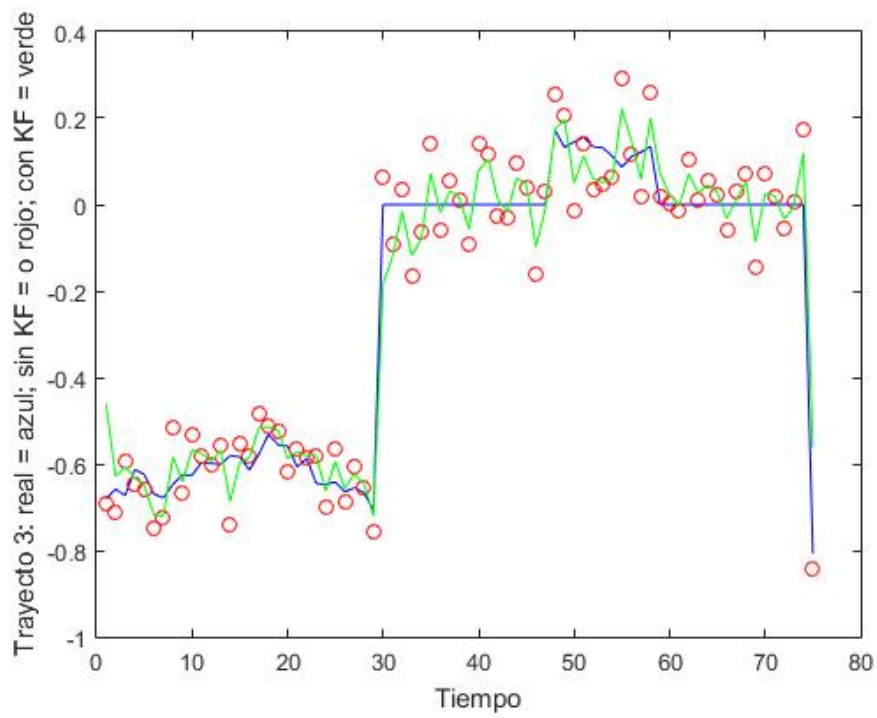


Figura 8.3: Prueba 1. Seguimiento del tercer trayecto con $\lambda_1 = 0,999$ y $P_{birth} = P_{death} = 5\%$.

P_{death}	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
0 %	3,6102	5,0807	28,9428 %
1 %	3,7669	5,0431	25,3052 %
2,5 %	3,9178	4,9687	21,1506 %
5 %	4,2275	4,9841	15,1793 %
10 %	4,7080	4,9589	5,0601 %
15 %	5,0971	5,0303	-1,3278 %
20 %	5,2712	4,9634	-6,2019 %
25 %	5,5283	4,9952	-10,6730 %

Tabla 8.2: Resultados de la prueba 2.

$P_{birth} = P_{death}$	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
0 %	3,6672	4,9309	25,6268 %
1 %	3,7714	5,0302	25,0250 %
2,5 %	3,8371	4,9835	23,0042 %
5 %	4,0487	5,0672	20,1010 %
10 %	4,4150	4,9915	11,5495 %
15 %	4,7171	4,9822	5,3202 %
20 %	5,1616	5,0136	-2,9526 %
25 %	5,0288	5,3978	-7,3373 %

Tabla 8.3: Resultados de la prueba 3.

son más cortos. De esa manera, nos podemos centrar en el crecimiento del error cuadrático medio introducido por la no linealidad, sin compensación alguna.

8.2.3 Prueba 3: λ_2 y $P_{birth} = P_{death}$

En la tabla 8.3 se muestran los resultados (error cuadrático medio con y sin KF) de las simulaciones para $\lambda_1 = 0,999$ y para distintas probabilidades de nacimiento y muerte de trayectos. La mejora del KF es bastante robusta para probabilidades no muy altas. Para $P_{birth} = P_{death} = 5\%$, el KF mantiene cuatro quintas partes de su ventaja.

La figura 8.5 muestra el seguimiento del primer trayecto durante el envío de 75 secuencias de entrenamiento. El canal está a cero aproximadamente la mitad de ese tiempo.

8.2.4 Prueba 4: λ_2 y $P_{birth} = 25\%$

En la tabla 8.4 se muestran los resultados (error cuadrático medio con y sin KF) de las simulaciones para $\lambda_2 = 0,99$, $P_{birth} = 25\%$ y distintas probabilidades de muerte

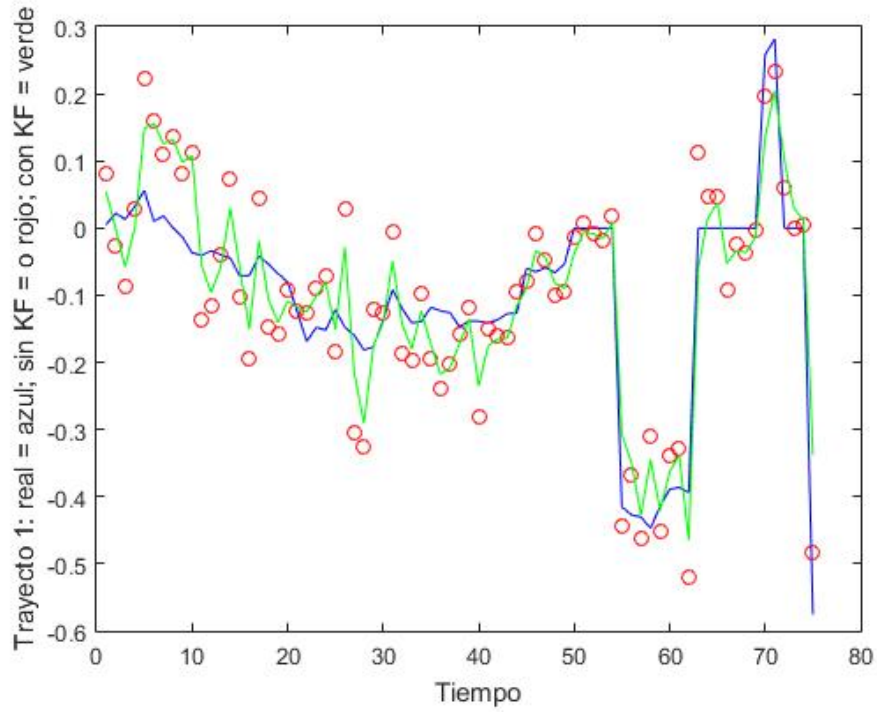


Figura 8.4: Prueba 2. Seguimiento de trayecto con $\lambda_1 = 0,999$, $P_{birth} = 25\%$ y $P_{death} = 5\%$.

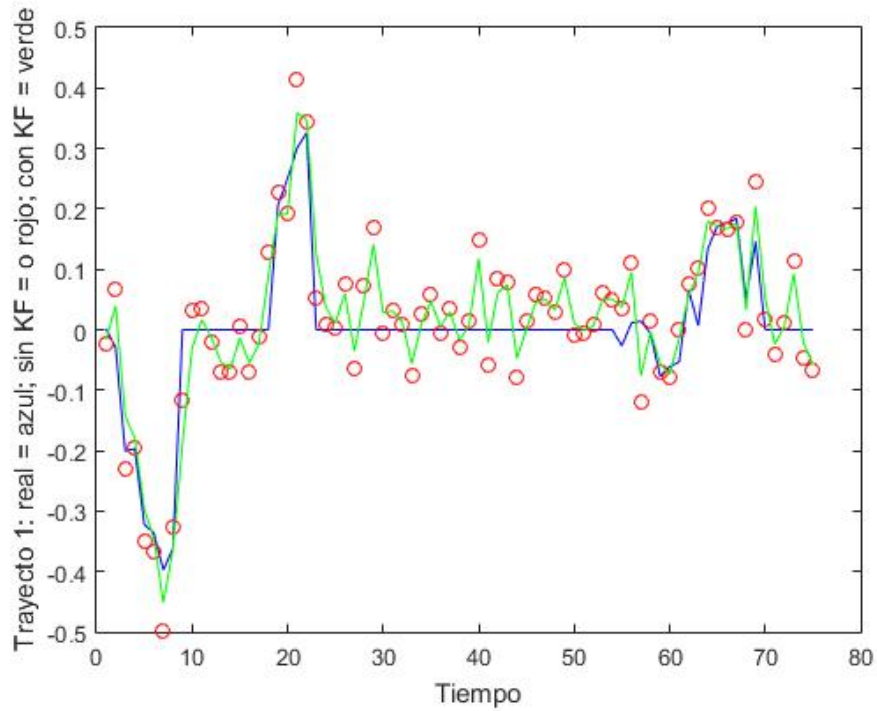


Figura 8.5: Prueba 3. Seguimiento de trayecto con $\lambda_2 = 0,99$ y $P_{birth} = P_{death} = 5\%$.

P_{death}	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
0 %	3,6102	5,0807	28,9428 %
1 %	3,9015	5,0704	23,0549 %
2,5 %	4,0223	4,9832	19,2816 %
5 %	4,3388	5,0230	13,6198 %
10 %	4,7504	4,9977	4,9483 %
15 %	5,0181	4,9869	-0,6252 %
20 %	5,2350	5,0201	-4,2800 %
25 %	5,5283	4,9952	-10,6730 %

Tabla 8.4: Resultados de la prueba 4.

de trayectos. La mejora del KF ya no es tan robusta como en la prueba 3. Para $P_{death} = 5\%$, el KF ha perdido un poco más de la mitad de su ventaja.

La figura 8.4 muestra el seguimiento de uno de los trayectos para $P_{death} = 5\%$. Como se puede apreciar en ella, ahora que los intervalos en los que el trayecto está desaparecido son más cortos, el KF se tiene que enfrentar a transiciones costosas. A partir de la trama 70, por ejemplo, se observa un salto desde cero hasta por encima del 0,8; al KF le cuesta unos instantes aproximarse mientras que la estimación sin KF detecta el salto de inmediato. De esa manera, la introducción de la no linealidad se está traduciendo en un peor rendimiento del KF.

8.2.5 Prueba 5: λ_3 y $P_{birth} = P_{death}$

En la tabla 8.5 se muestran los resultados para $\lambda_3 = 0,95$ y para varias probabilidades de nacimiento y muerte de trayectos. Ahora se produce un hecho que llama la atención: la introducción de la supuesta no linealidad hace que la ventaja del KF *se amplíe*. En concreto, pasa de aprox. un 15% sin no linealidad a aprox. un 20% al añadir la supuesta no linealidad con una $P_{birth} = P_{death} = 1\%$. Ahora bien, analicemos qué significa esa probabilidad del 1 %. De cada 200 tramas, podemos esperar que 100 tramas pasen por el trayecto activo, con una ganancia que se podrá aproximar perfectamente con KF ya que, a partir de la primera trama, solo seguirá un modelo GML hasta su muerte.

Las otras 100 tramas o instantes verán el trayecto muerto, con una ganancia estática de cero, aproximable perfectamente con KF (mientras que la estimación sin KF se ve afectada por el ruido). Así pues, no estamos introduciendo una no linealidad, sino una mayor linealidad⁴; de ahí que el KF mejore.

⁴Especialmente si tenemos en cuenta que estamos trabajando con un parámetro $\lambda_3 = 0,95$, que supone una correlación relativamente baja; de hecho se utiliza para analizar entornos de gran movilidad (por ejemplo, en [JIA05]), con un efecto Doppler relativamente grande.

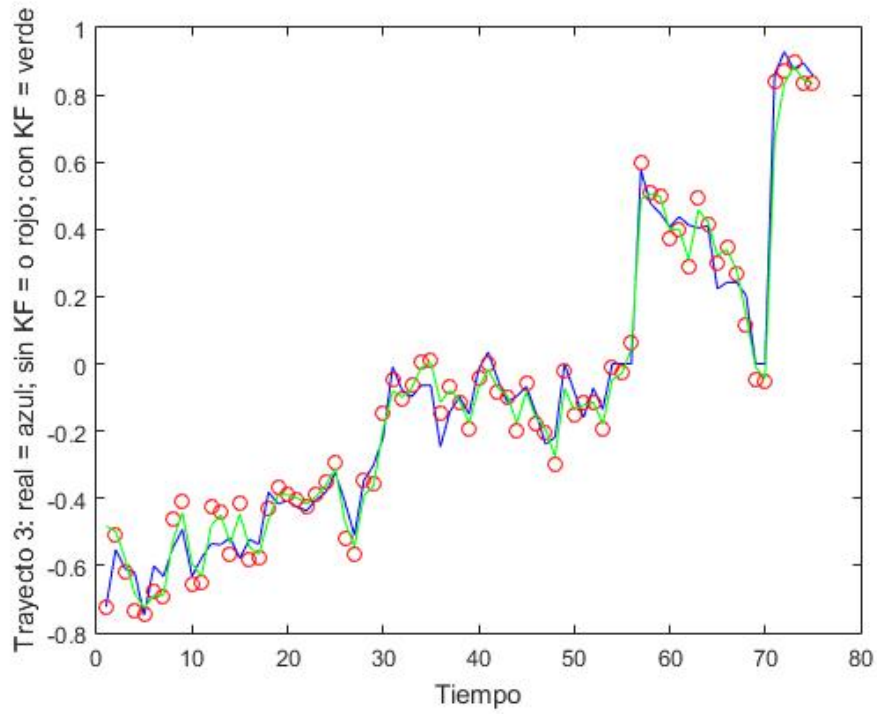


Figura 8.6: Prueba 4. Seguimiento de trayecto con $\lambda_2 = 0,99$, $P_{birth} = 25\%$ y $P_{death} = 5\%$.

$P_{birth} = P_{death}$	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
0 %	4,2433	4,9886	14,9406 %
1 %	4,0654	5,0845	20,0437 %
2,5 %	4,0496	4,9733	18,5740 %
5 %	4,2772	5,0577	15,4321 %
10 %	4,5215	4,9465	8,5919 %
15 %	4,8483	4,9948	2,9320 %
20 %	5,2753	5,0633	-4,1854 %
25 %	5,4848	4,9701	-10,3561 %

Tabla 8.5: Resultados de la prueba 5.

P_{death}	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
0 %	4,2433	4,9886	14,9406 %
1 %	4,3617	5,0267	13,2287 %
2,5 %	4,4506	4,9942	10,8859 %
5 %	4,7456	5,0527	6,0772 %
10 %	4,9455	4,9984	1,0585 %
15 %	5,2354	5,0020	-4,6667 %
20 %	5,3281	4,9950	-6,6673 %
25 %	5,4848	4,9701	-10,3561 %

Tabla 8.6: Resultados de la prueba 6.

8.2.6 Prueba 6: λ_3 y $P_{birth} = 25$ %

La tabla (8.6) muestra los resultados para λ_3 y $P_{birth} = 25$ %. Al contrario que en la prueba 5, al emplear $P_{birth} = 25$ % nos aseguramos de que la supuesta no linealidad que introducimos actúe realmente como una no linealidad. El resultado, en línea de lo esperado, es que el KF se degrada catastróficamente, tal y como muestra la tabla 8.6. Para $P_{death} = 5$ %, la ventaja del KF se ha reducido a más de la mitad. Para $P_{death} = 10$ %, la ventaja del KF es prácticamente despreciable. Y para probabilidades de muerte de trayecto aún mayores, el KF presenta resultados peores que la estimación sin KF.

Por el contrario, como en las otras cinco pruebas, los resultados de esta muestran que la estimación MMSE convencional (sin KF), al no estar basada en ninguna suposición de linealidad respecto de instantes anteriores, no presenta ninguna tendencia significativa de empeoramiento.

En la figura 8.7, se muestra el seguimiento de un trayecto durante 50 tramas. El efecto más aparente de introducir la no linealidad es que la línea verde a veces parece una línea paralela a la azul, pero desplazada a la derecha. Esto significa, en términos de comunicaciones, que el KF tiene un retardo de al menos un instante para adaptarse a los saltos. Es en esas transiciones donde el KF presenta un rendimiento inferior a la estimación sin KF. Por eso, al aumentar la frecuencia de esas transiciones (lo que equivale a decir: al aumentar la no linealidad de los movimientos), el KF se degrada de forma rápida e incluso catastrófica.

8.2.7 Conclusiones

De las seis pruebas anteriores, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1) **El filtro de Kalman es relativamente robusto a probabilidades bajas** de $P_{birth} = P_{death}$. Esto se debe en parte a que la no linealidad producida por las

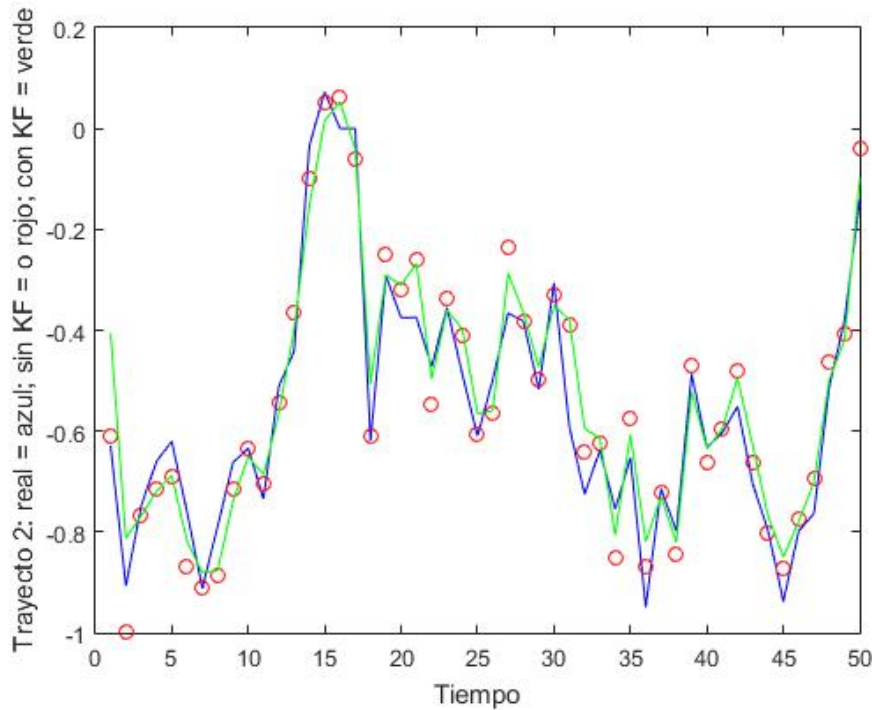


Figura 8.7: Prueba 6. Seguimiento de trayecto con $\lambda_3 = 0,95$, $P_{birth} = 25\%$ y $P_{death} = 5\%$.

transiciones (poco frecuentes) de aparición/desaparición de trayectos se ve compensada (y, bajo ciertas condiciones, incluso más que compensada) por el seguimiento perfecto del trayecto desaparecido.

2) **El filtro de Kalman se degrada rápidamente al introducir componentes no lineales intensas** (en forma de transiciones o saltos frecuentes). Para los tres parámetros λ utilizados, unas probabilidades de $P_{birth} = 0,25$ y $P_{death} = 0,05$ implican que se pierda al menos la mitad de la ventaja del KF.

3) **Para probabilidades $P_{birth} = P_{death}$ muy altas, la degradación del KF es catastrófica**, esto es, la estimación MMSE sin KF resulta mejor en términos de MSE.

4) **La degradación del KF se concentra en las transiciones**. La estimación MMSE sin KF es capaz de detectar el salto inmediatamente, mientras que el filtro de Kalman necesita unos instantes para ponerse a su nivel y completar el salto.

5) Si se desea adaptar el KF a la no linealidad para recuperar su ventaja inicial, **hay que actuar sobre el comportamiento del KF en las transiciones**. Es una consecuencia inmediata de la conclusión anterior.

Los resultados y las conclusiones que de ellos se desprenden (y que sugieren que el filtrado de Kalman, óptimo para problemas lineales, se degrada significativamente en cuanto aparecen componentes no lineales intensas), son coherentes con trabajos

como [ANG09], donde el filtro de Kalman también muestra peores prestaciones que soluciones similares a la estimación MMSE sin KF.

Capítulo 9

Simulación 4: Número fijo de trayectos

Escenarios no equivalentes

En este capítulo, pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿un escenario con nacimiento y muerte de trayectos es equivalente a un escenario con un número de trayectos constante, pero menor del esperado? Para ello, ofreceremos un contraejemplo.

9.1 Antecedentes del problema

El problema considerado en la simulación 3 suponía introducir una variación no solo en el número de trayectos sino también en cuáles de ellos estaban activos en cada momento. Eso podría suponer una diferencia fundamental respecto del escenario en el que el número fijo de trayectos es fijo, aunque menor del esperado *a priori*. Ahora bien, antes de la aplicación de RST, no se habían considerado los problemas que supone utilizar filtrado de Kalman en entornos de nacimiento y muerte de trayectos; por el contrario, en varios *papers* se había utilizado el escenario de un número fijo de trayectos (menor de lo esperado) para dar robustez a su propuesta, asegurando que seguir menos trayectos activos de lo esperado no suponía un gran impacto.

Así, por ejemplo, en [YAN02] se consideró un estimador de canal multitrayecto para un número constante de trayectos. En concreto, el estimador partía de la hipótesis de que había cinco trayectos. Los autores demostraban que, aunque solo hubiera tres, esta falta de adaptación solo producía una leve degradación en las prestaciones del estimador propuesto.

Posteriormente, los autores de [ANG07] aclararon que una situación en la que hay

Trayecto muerto	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
Trayecto 1	3,5584	5,0032	28,8767 %
Trayecto 2	3,5603	5,0173	29,0389 %
Trayecto 3	3,6138	5,0985	29,1203 %

Tabla 9.1: Mejora del filtro de Kalman cuando uno de los trayectos ha muerto, $\lambda_1 = 0,999$.

un número de trayectos menor del previsto, pero constante, no tiene por qué tener el mismo comportamiento que una situación en la que cada trayecto puede morir y renacer. Sin embargo, hasta la fecha no se ha publicado ninguna demostración de este hecho.¹

9.2 Objetivo y estructura de la simulación

Con esta simulación pretendemos demostrar precisamente que el escenario de un número fijo de trayectos es radicalmente distinto del presentado en la simulación 3. Para ello, anulamos permanentemente uno de los trayectos y vemos cómo se comporta el banco de filtros de Kalman de la simulación 3 (todos los demás parámetros serán análogos a la simulación 3).

En cada prueba de este capítulo, hemos realizado tres simulaciones, anulando sucesivamente cada uno de los trayectos. La simulación de cada parámetro se ejecutó durante el envío de 10.000 tramas de entrenamiento, manteniéndose constante el parámetro λ . Se realizaron tres pruebas distintas para los parámetros $\lambda_1 = 0,999$, $\lambda_2 = 0,99$ y $\lambda_3 = 0,95$, respectivamente. Es decir, compararemos los escenarios de número fijo de trayectos vs. muerte y nacimiento de trayectos para los parámetros ya utilizados en el capítulo anterior (SNR=10 dB, etc.).

9.3 Resultados y conclusión

Los resultados muestran que si hay activos solamente dos trayectos a pesar de estar dimensionado el banco de filtros de Kalman para tres, no se produce ninguna degradación significativa en absoluto.

La tabla 9.1 muestra la mejora del filtro de Kalman para $\lambda_1 = 0,999$. Como se puede comprobar, los resultados son indistinguibles de la simulación con $P_{birth} = P_{death} = 0\%$ indicada en la tabla 8.1. Por tanto, la anulación de un trayecto no ha supuesto ninguna degradación en absoluto, al contrario de lo que supuso la

¹Al menos, ninguna que el autor de este PFC conozca.

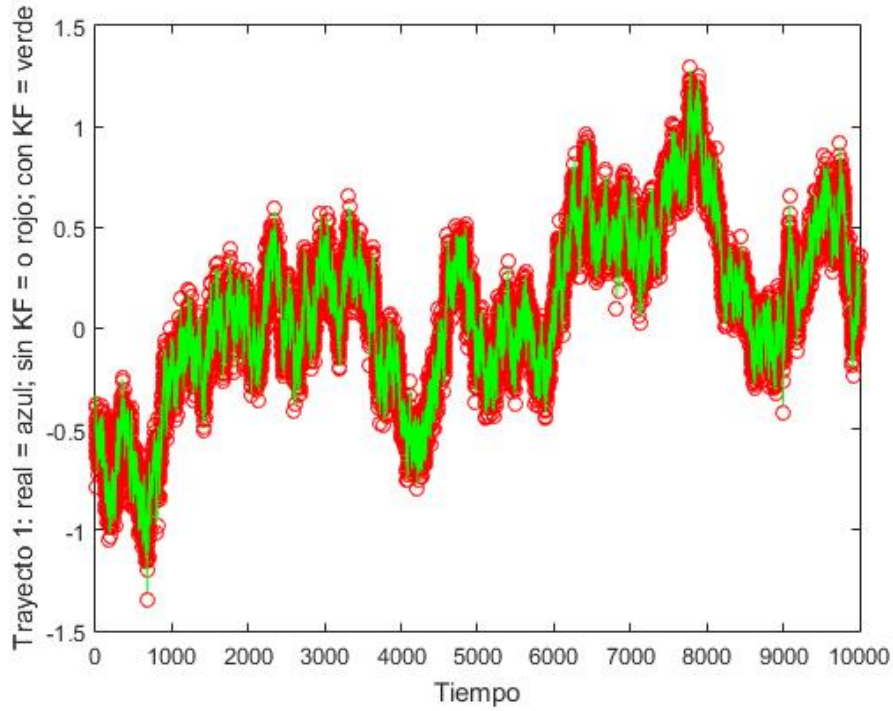


Figura 9.1: Seguimiento del primer trayecto cuando el segundo está muerto, $\lambda_1 = 0,999$.

Trayecto muerto	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
Trayecto 1	3,6733	5,0005	26,5426 %
Trayecto 2	3,6500	5,0020	27,0290 %
Trayecto 3	3,6390	4,9734	26,8311 %

Tabla 9.2: Mejora del filtro de Kalman cuando uno de los trayectos ha muerto, $\lambda_2 = 0,99$.

introducción de una dinámica de nacimiento y muerte de trayectos, incluso para probabilidades bajas.

Las figuras 9.1, 9.2 y 9.3 muestran el seguimiento multitrayecto a lo largo de las 10.000 secuencias de entrenamiento enviadas. La escala hace imposible ver la línea azul (canal real), que se puede intuir aproximadamente en el centro de las envolventes verde (seguimiento con KF) y roja (seguimiento sin KF). Como se puede observar, el hecho de que haya solamente dos trayectos activos no supone ninguna dificultad añadida para el seguimiento.

La tabla 9.2 muestra los resultados de la simulación para $\lambda_2 = 0,99$. Nuevamente, resultan indistinguibles del respectivo caso con $P_{birth} = P_{death} = 0\%$ indicado en la tabla 8.3, salvo quizás por ser algo más favorables al filtrado de Kalman (lo cual se explica por la autocorrelación absoluta en el tiempo del trayecto muerto).

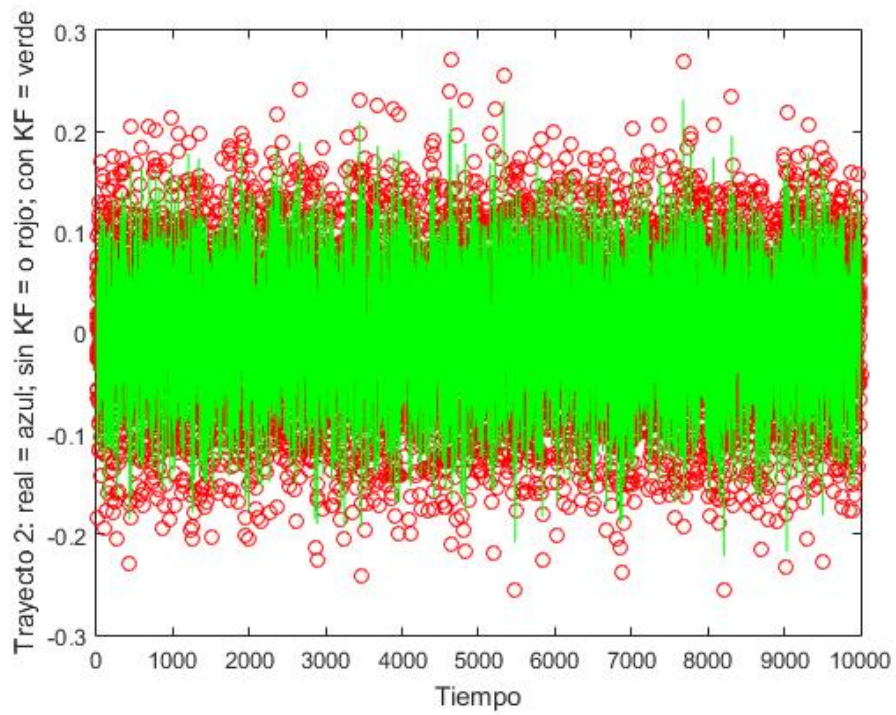


Figura 9.2: Seguimiento del segundo trayecto (muerto), $\lambda_1 = 0,999$.

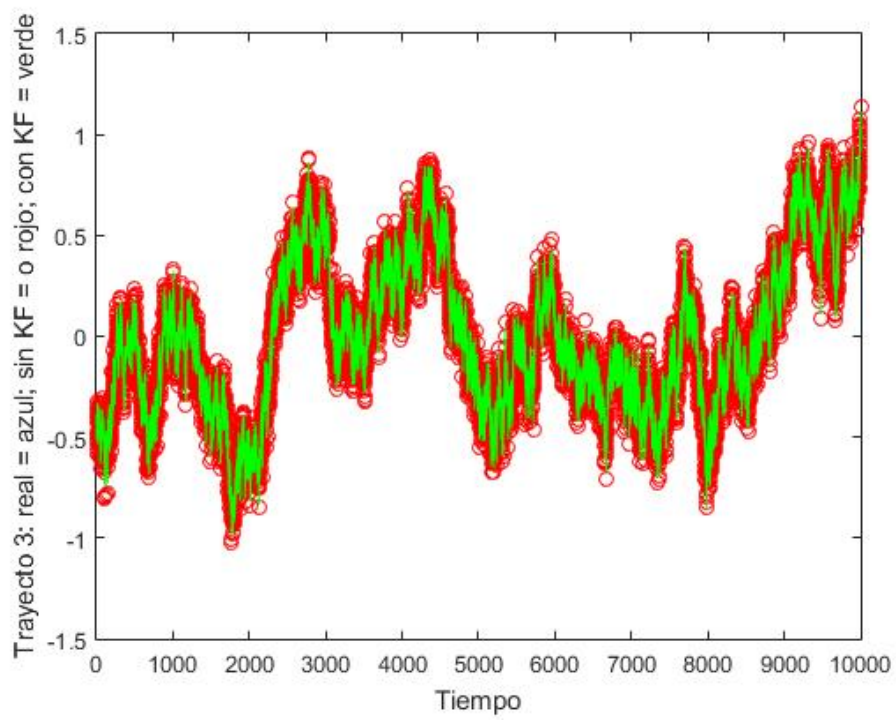


Figura 9.3: Seguimiento del tercer trayecto cuando el segundo está muerto, $\lambda_1 = 0,999$.

Trayecto muerto	MSE con KF ($\times 10^{-3}$)	MSE sin KF ($\times 10^{-3}$)	Mejora KF
Trayecto 1	4,0575	5,0239	19,2361
Trayecto 2	4,0151	5,0010	19,7134
Trayecto 3	3,9959	4,9275	18,9065

Tabla 9.3: Mejora del filtro de Kalman cuando uno de los trayectos ha muerto, $\lambda_3 = 0,95$.

La tabla 9.3 muestra los resultados de la simulación para $\lambda_3 = 0,95$. Dado que la diferencia entre la autocorrelación absoluta en el tiempo ($\lambda = 1$) del trayecto muerto y la autocorrelación de los trayectos activos ($\lambda_3 = 0,95$) es ahora mayor, los resultados son aún más favorables al filtrado de Kalman (compárese con el respectivo caso de $P_{birth} = P_{death} = 0\%$ indicado en la tabla 8.5).

Por consiguiente, se demuestra que tener un número constante de trayectos constituye una situación completamente distinta a la de tener nacimiento y muerte de trayectos. Esto sugiere que incorporar el comportamiento estocástico de nacimiento y muerte de trayectos resulta una tarea ineludible para la ingeniería de comunicaciones móviles OFDM.

Capítulo 10

Conclusiones

El trabajo realizado nos ha permitido comprender mucho mejor el estado actual de la tecnología y las dinámicas de nacimiento y muerte de trayectos, así como las posibilidades de seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM.

10.1 Revisión de objetivos

El objetivo principal consistía en **simular el seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM**, y, concretamente, simular el seguimiento, mediante bancos de filtros de Kalman, de canales sometidos a una dinámica de nacimiento y muerte de trayectos, dentro de un entorno OFDM. Este objetivo se ha cumplido después de una exhaustiva revisión de los antecedentes, simulando, de manera modular, distintos aspectos del seguimiento de canales en comunicaciones móviles OFDM. Uno de los requisitos que nos establecimos fue que esta simulación debía realizarse bajo una serie de escenarios con distinta intensidad de la componente no lineal, para calibrar hasta qué punto de no linealidad el filtro de Kalman resiste con prestaciones aceptables. El análisis del seguimiento, según razonábamos, nos aportará información muy valiosa sobre las limitaciones de las técnicas actuales.

En efecto, así ha sido. Hemos simulado el seguimiento de canales bajo distintos escenarios (número fijo de trayectos, muerte y nacimiento de trayectos) y distintas intensidades de la componente no lineal (distintas probabilidades de nacimiento y muerte de trayectos, lo cual se traduce en mayores o menores periodos relativos de transición). La simulación 3, en concreto, ha delimitado claramente el espacio en el que se puede utilizar KF y el espacio en el que habría que recurrir a técnicas alternativas que aborden la no linealidad. Además, se ha realizado un análisis crítico de los antecedentes en el capítulo 5. El conjunto de estos trabajos podría constituir una

base suficiente para investigar nuevos enfoques al seguimiento de las no linealidades en comunicaciones móviles OFDM (véase el apartado 10.2, “Perspectivas a explorar en trabajos futuros”).

Comenzamos este PFC asegurando que para la consecución del objetivo anteriormente expuesto sería necesario realizar las siguientes tareas u **objetivos secundarios** (cuya consecución ahora revisamos):

- **Analizar y definir el modelo OFDM y los modelos de evolución de ganancia de trayecto que se utilizarán en el sistema.** Partiendo de un modelo general de OFDM (capítulo 2), hemos realizado una simplificación adaptada a los fines de este proyecto y hemos planteado un diseño de implementación (capítulo 7). De manera análoga, hemos estudiado el modelo de Gauss-Markov lineal en el capítulo 6 para aplicarlo como generador de ganancias de trayecto.
- **Analizar el filtrado de Kalman y definir un algoritmo de estimación basado en filtrado de Kalman** para realizar el seguimiento de trayectos que sigan una evolución de Gauss-Markov lineal, tanto para el caso monotrayecto como para el caso multitrayecto/OFDM. Este objetivo se ha cumplido exhaustivamente con la exposición teórica y análisis de antecedentes del capítulo 3 y la definición del algoritmo de estimación, pseudocódigo incluido, en el capítulo 6. Todas nuestras simulaciones han integrado el filtrado de Kalman.
- **Implementar una simulación de un seguimiento monotrayecto** en el que la ganancia de canal evolucione según un modelo de Gauss-Markov lineal y la estimación se realice mediante un filtro de Kalman. Este objetivo se ha cumplido en la simulación 1 (capítulo 6), que nos demostró que el filtro de Kalman mejoraba¹ la estimación MMSE sin KF en torno al 16 %.
- **Implementar una simulación de un seguimiento multitrayecto** en el que cada ganancia de canal evolucione según un modelo de Gauss-Markov lineal y la estimación se realice mediante un banco de filtros de Kalman. Este objetivo se ha cumplido en la simulación 2 (capítulo 7), que nos demostró que el banco de filtros de Kalman mejoraba el seguimiento multitrayecto también en torno al 16 %.
- **Analizar y definir un modelo de comportamiento estocástico de nacimiento y muerte de trayectos.** Hemos cumplido este objetivo: nuestro modelo, simétrico, con probabilidades de nacimiento P_{birth} y muerte P_{death}

¹En el sentido de reducir el MSE adicionalmente respecto del MSE de la estimación sin KF.

idénticas, se ha introducido en la simulación 3 (capítulo 8) y nos ha permitido calibrar la no linealidad de la simulación para establecer en qué punto la degradación del filtro de Kalman pasaba a ser catastrófica.

- **Implementar una simulación de un seguimiento multitrayecto** en el que cada ganancia de canal evolucione no solo según un modelo lineal-gaussiano, sino también **según una componente no lineal** de nacimiento y muerte de trayectos; la simulación incluirá un cómputo de las prestaciones reductoras del error cuadrático medio que presenta el filtro de Kalman para una larga serie de valores de intensidad de la no linealidad (asociados a los parámetros P_{birth} y P_{death} , probabilidades de nacimiento y muerte de trayecto, respectivamente). Hemos cumplido este objetivo en la simulación 3 (capítulo 8), donde demostramos que, para una componente no lineal poco intensa (probabilidades de nacimiento o muerte en torno al 2,5 %), el filtro de Kalman podía seguir utilizándose, aun con prestaciones reducidas. Sin embargo, rápidamente sus prestaciones se degradaban, especialmente si los periodos de inactividad del trayecto muerto eran cortos; bajo ciertas circunstancias, la degradación era catastrófica y la estimación sin KF obtenía mejores resultados.
- **Implementar una simulación de un seguimiento multitrayecto en el que el número de trayectos activos sea constante** pero inferior al previsto (inferior a la dimensión del banco de filtros). Este objetivo se cumplió al implementar este escenario en la simulación 4 y demostrar, mediante un claro contraejemplo, que no se pueden equiparar los escenarios de nacimiento y muerte con los escenarios de un número de trayectos activos constante, pero menor del esperado. En este último caso, no existe degradación de las prestaciones del KF, sino, en función de los parámetros, incluso una leve mejora. Esto muestra que las situaciones mencionadas no son equiparables.

Por consiguiente, hemos cumplido todos los objetivos que nos habíamos planteado al iniciar este PFC. Además, cabe resaltar que el conocimiento adquirido nos ha permitido abordar las técnicas actuales desde una perspectiva crítica y puede permitir plantear un nuevo enfoque al problema, como sugiere el siguiente apartado.

10.2 Perspectivas a explorar en trabajos futuros

Este trabajo es un punto de partida para una investigación más profunda en el seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM. Existe mucho

camino por recorrer y los desafíos no son triviales. A continuación, se exponen una serie de ideas para ampliar esta investigación y abordar el problema desde nuevas perspectivas.

10.2.1 Resolución *ad hoc* del problema no lineal

Dado que la evidencia sugiere intensamente que la hipótesis de linealidad-gaussianidad resulta práctica en la mayoría de las situaciones, y dado que los propios estudios [ANG07, ANG09] sugieren que el problema se puede dividir en dos componentes de naturaleza separable, una lineal y otra no lineal (como demuestra el hecho de que el mejor estimador en las simulaciones sea GMAP-III, que primero clasifica los trayectos según su componente no lineal, y luego realiza un seguimiento esencialmente análogo al de KF para cada trayecto), la solución podría pasar por simplificar el problema de tal manera que la componente lineal se siga estimando con KF y la componente no lineal (p. ej. en nuestro caso, la muerte y el nacimiento de trayectos) se detecten inmediatamente mediante algún mecanismo *ad hoc* desarrollado a partir de un cierto modelo de nacimiento y muerte de trayectos.

El sistema resultante sería una especie de bancos de filtros de Kalman, cada uno de los cuales estaría asociado a un interruptor *ad hoc*. Cuando ese interruptor detecta que el trayecto muere, directamente “apagaría” el filtro asociado y se llevaría la ganancia de trayecto estimada a cero. Cuando se detectara un nuevo nacimiento, directamente “se encendería” el filtro asociado y comenzaría un nuevo seguimiento mediante KF. La ventaja de este método, aparte de su carácter manejable, práctico y su coste computacional posiblemente mucho más bajo, reside también en que permitiría abordar dinámicas de nacimiento y de muerte de trayectos más realistas (p. ej. nacimiento y muerte paulatinos de los trayectos, y no inmediatos como hasta ahora; probabilidades de nacimiento y muerte cambiantes según un modelo de estados de Markov, etc.).

Necesariamente, este algoritmo, para que sea computacionalmente sencillo, tendrá que basarse en una serie de características específicas del modelo simplificado de nacimiento y muerte de trayectos. Sin embargo, las simulaciones y el estudio de los antecedentes presentados en este PFC respaldan esta propuesta de estudio.

10.2.2 Elementos que aportan realismo adicional

Si se consigue algún algoritmo como el propuesto en el apartado precedente, se podrían abordar dinámicas de nacimiento y muerte más ricas en detalles. Por ejemplo, cabe la posibilidad de que, en mediciones reales, los datos encajen bien con un

modelo de estados de Markov en el que la probabilidad de nacimiento o muerte de trayecto dependa del estado actual del escenario. (Por poner un ejemplo sencillo que clarifique este punto: existen trabajos, como [CHO03], que demuestran, sobre mediciones reales, que la probabilidad de que muera un trayecto es mayor cuando acaba de morir otro trayecto, porque el efecto puede tener una causa común que se muestre con retardo en función del trayecto).

10.2.3 Aleatorización adaptativa bajo incertidumbre del comportamiento estocástico del canal

La aplicación de RST al seguimiento de canales no lineales ha partido de un conocimiento preciso y cierto de la dinámica del canal y, en concreto, de la probabilidad de nacimiento y muerte. Sin embargo, en la realidad, uno no puede suponer certidumbre absoluta al respecto. En ese sentido, actualmente el estimador basado en RST sufre de una “sobreadaptación” a un parámetro en el que pone excesiva confianza. Sería más razonable explorar algoritmos que aleatorizaran (como método para representar la incertidumbre) el parámetro a partir del cual detectar el nacimiento y la muerte del trayecto. De esta manera, si en vez de un solo punto, nos encontráramos ante una distribución de probabilidad, bien sea una uniforme en un intervalo, o bien una gaussiana truncada por los lados, etc. obtendríamos un algoritmo más flexible y que probablemente funcionara mejor en escenarios reales. (La idea es que el seguimiento no se haga partiendo de un 5 % de probabilidad de nacimiento o muerte, sino de una gama continua de valores posibles con distinta ponderación).

10.2.4 Nacimiento y muerte paulatinos del canal

Las simulaciones presentadas hasta ahora, incluidas las del presente trabajo, partían de que el canal nacía y moría inmediatamente, “sin avisar”. Existen otros modelos, que podrían ser más realistas, en los que la desaparición y la reaparición del canal son paulatinas, siguiendo determinadas funciones. Incorporar estos modelos podría abrir una perspectiva más adaptada a la práctica de la estimación en entornos reales. En este sentido habría que considerar también las ventajas y los inconvenientes de utilizar distintas funciones sintetizadas para representar la dinámica de nacimiento y muerte, como las presentadas en [FLE96, JAK14].

Capítulo 11

Presupuesto

El presente PFC ha sido planificado y presupuestado en detalle. En concreto, la planificación del proyecto se ha realizado por etapas con hitos claramente definidos, así como con relaciones de precedencia (para el diagrama PERT). A continuación, se presentan un resumen de la planificación y un estudio de los costes asociados a este proyecto de seguimiento de canales no lineales en comunicaciones móviles OFDM.

11.1 Tareas y diagrama PERT

En primer lugar, se presenta la descripción de todas las tareas (etapas) de las que consta el presente proyecto, así como su duración (se han considerado 20 días de trabajo al mes). El diagrama PERT, que engloba todas estas tareas y en el que se especifican las relaciones de precedencia entre ellas así como el camino crítico, se puede encontrar al final de este apartado. La línea de tareas es la siguiente (no necesariamente en orden de realización):

Estudio de los antecedentes (T1). Consiste en el estudio de los avances realizados en la última década en torno a la aplicación de filtrado de Kalman en entornos de comunicaciones móviles OFDM así como los avances en el modelado de no linealidades como el nacimiento y la muerte de trayectos y en el seguimiento de estas no linealidades mediante la aplicación de Teoría de Conjuntos Aleatorios y métodos de Monte Carlo Secuencial¹, así como la exposición detallada de un modelo RST para OFDM (Apéndice A). Duración estimada de la tarea: dos meses.

¹A primera vista, podría parecer exagerada la necesidad de estudiar tan diferentes avances, especialmente si, como en el caso de la Teoría de Conjuntos Aleatorios, luego no han sido implementados en simulaciones dentro de este PFC. Sin embargo, este estudio exhaustivo ha resultado fundamental tanto para establecer claramente qué es lo que se necesitaba investigar en este ámbito como para comparar, con cierto juicio crítico, las distintas alternativas existentes para abordar las no linealidades en canales OFDM.

RED PERT

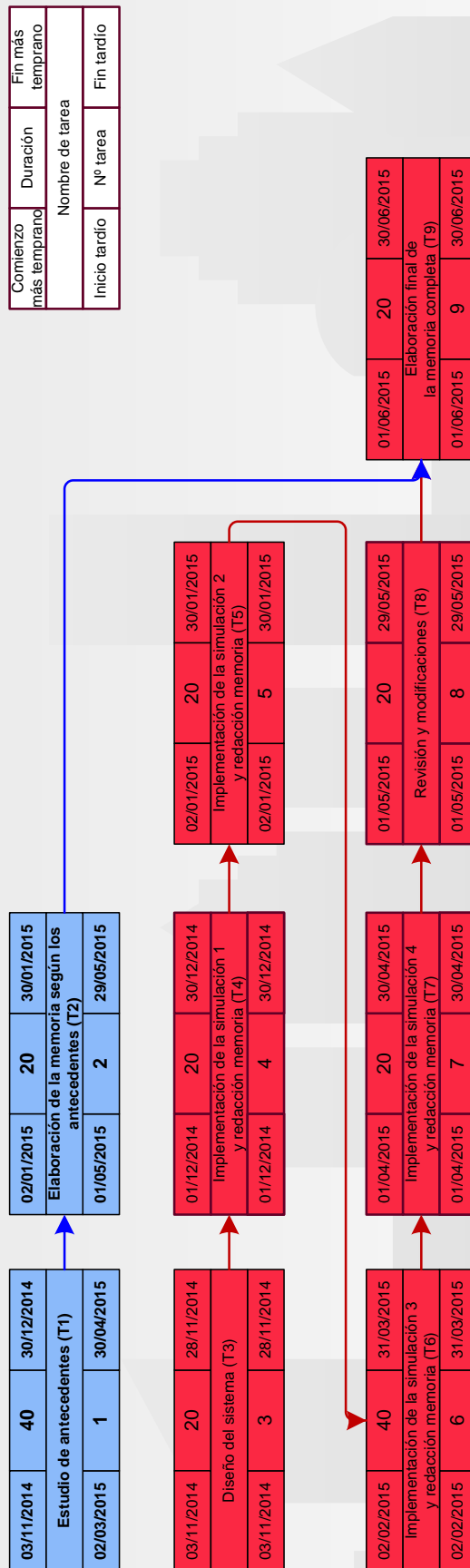


DIAGRAMA DE BARRAS

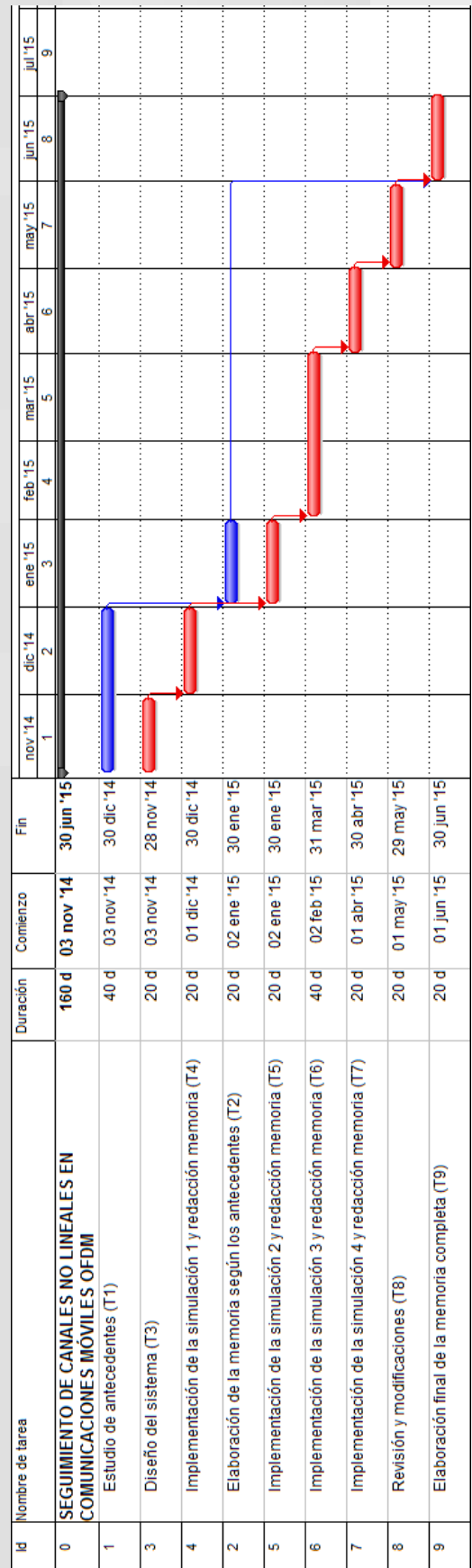


Figura 11.1: Red PERT y diagrama de barras de las tareas

Elaboración de la memoria sobre los antecedentes (T2). Consiste en la redacción, dentro de esta memoria, de las secciones que abordan los antecedentes. Esto incluye prácticamente todo lo referido a la explicación teórica de los modelos OFDM (capítulo 2), filtrado de Kalman (capítulo 3), seguimiento de canal en sistemas no lineales (capítulo 4) y nuestro análisis crítico sobre el estado del arte en estos ámbitos (capítulo 5). Duración estimada de la tarea: un mes.

Diseño del sistema (T3). Consiste en la definición detallada de las simulaciones a realizar, seleccionando las características de los modelos subyacentes y sus parámetros. Incluye la redacción del pliego de requisitos, la elección de la plataforma de desarrollo y el diseño de los módulos informáticos, y la resolución de los problemas técnicos globales de diseño. Duración estimada de la tarea: un mes.

Implementación de la simulación 1 y redacción de su memoria (T4). Incluye la implementación de la simulación 1 (seguimiento de un canal monotrayecto conforme a un modelo de Gauss-Markov lineal mediante un filtro de Kalman) y la elaboración de la correspondiente memoria con explicación teórica y resultados (capítulo 6). Duración estimada de la tarea: un mes.

Implementación de la simulación 2 y redacción de su memoria (T5). Incluye la implementación de la simulación 2 (seguimiento de un canal multitrayecto, con trayectos que siguen un modelo de Gauss-Markov lineal, mediante un banco de filtros de Kalman) y la elaboración de la correspondiente memoria con explicación teórica y resultados (capítulo 7). Duración estimada de la tarea: un mes.

Implementación de la simulación 3 y redacción de su memoria (T6). Incluye la implementación de la simulación 3 (seguimiento de un canal multitrayecto, con trayectos que siguen un modelo de Gauss-Markov lineal con una dinámica estocástica de nacimiento y muerte de trayectos, mediante un banco de filtros de Kalman, y comparación de resultados para una serie de valores del parámetro $P_{birth} = P_{death}$), así como la elaboración de la correspondiente memoria con explicación teórica y resultados (capítulo 8). Duración estimada de la tarea: dos meses.

Implementación de la simulación 4 y redacción de su memoria (T7). Consiste en la implementación de la simulación 4 (seguimiento de un canal con un número de trayectos constante, pero menor del esperado, para tratar de responder a la pregunta: ¿Un escenario con nacimiento y muerte de trayectos es equivalente a un escenario con un número de trayectos constante, pero menor del esperado?), la valoración de los resultados y la elaboración de la correspondiente memoria con explicación teórica y resultados (capítulo 9). Duración estimada de la tarea: un mes.

Revisión y modificaciones (T8). Consiste en la revisión, idealmente por otro ingeniero², de los resultados, la detección de errores y la realización de las modificaciones pertinentes en los módulos implementados y en la memoria. Esta etapa de revisión requiere haber completado todas las tareas anteriores puesto que solo así se tienen todos los elementos de juicio para encontrar todos los errores, incluso los más sutiles. Duración estimada de la tarea: un mes.

Elaboración final de la memoria completa (T9). Consiste en la redacción de la memoria completa, revisando e integrando los módulos redactados en las tareas T2, T4, T5, T6, T7 y T8, proporcionando un guión y una notación matemática uniformes, así como redactando los capítulos restantes (incluido el capítulo 10, de conclusiones y trabajos futuros, y este capítulo 11, con el presupuesto). Duración estimada de la tarea: un mes.

La suma total de duraciones de las tareas asciende a 11 meses, y el camino crítico permite terminar el proyecto (simultaneando tareas) en 8 meses.

11.2 Presupuesto de costes

Una vez realizada la planificación del proyecto, pasamos a calcular los costes (materiales y de personal) asociados.

11.2.1 Costes materiales

En la siguiente tabla se presentan los costes materiales:

Componente	Coste total	Coste asociado
Conexión internet ADSL	320 €	160 €
Portátil Aspire V 2,0 GHz (incluye Windows)	800 €	400 €
Libros técnicos	200 €	200 €
Lyx / Matlab estudiantes	42,35 €	0 €
Total	2542,35 €	760 €

A continuación, desglosamos cada uno de los costes, justificando el importe asociado al proyecto.

Conexión Internet ADSL: la conexión a internet ha sido necesaria a lo largo de todo el proyecto, desde las etapas de búsqueda de información sobre los antecedentes (especialmente la búsqueda de papers), pasando por las de diseño y programación, corrección de errores en Matlab, descarga de software gratuito, etc. hasta la redacción final de la memoria. El coste de la conexión ha sido de 40 € mensuales

²En nuestro caso, las tutorías resultaron fundamentales para detectar errores, que, como en todo emprendimiento humano, los hubo y llevó su tiempo corregirlos.

durante ocho meses. Sin embargo, asociamos a este proyecto solo el 50 % de ese coste: 160 €.

Portátil Aspire V 2,0 GHz: portátil utilizado en todas las etapas del PFC. Incluye un sistema operativo Windows y una selección de herramientas. Su coste total viene a ser de 800 €, e imputamos a este proyecto el 50 % del coste: 400 €.

Libros técnicos: aunque la biblioteca de la Universidad Carlos III ha permitido la consulta de mucho material, ha sido necesario comprar un par de libros técnicos (“An Introduction to Random Sets”, de Nguyen, y “Particle Filters for Random Set Models”, de Ristic) para comprender mejor el estado actual de la tecnología en torno a filtros de partículas y Teoría de Conjuntos Aleatorios. Imputamos a este proyecto el 100 % del coste.

Lyx / Matlab de estudiantes: Lyx es la herramienta gratuita de creación de textos en Latex con la que se ha redactado esta memoria. Explicitamos este componente de coste nulo para enfatizar la importancia de utilizar software gratuito. La versión para estudiantes de Matlab cuesta 42,35 €, pero ya teníamos la licencia anteriormente, por lo cual su coste asociado al PFC es nulo.

La suma de los costes materiales asociados a este proyecto asciende a 760 euros.

11.2.2 Costes de personal

Los costes de personal del proyecto coinciden con los salarios del personal necesario para la realización de todas y cada una de las etapas del proyecto. Todas las tareas reseñadas en la planificación PERT requieren para su realización de una categoría profesional equivalente a Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones, con especialidad en Sistemas de Telecomunicación. En el mercado libre español, los salarios a tiempo completo para esa categoría profesional oscilan, *grossa modo*, entre 18.000 y 35.000 euros³. El siguiente cálculo se basa en un salario bruto anual de 26.500 euros⁴ y unos gastos asociados (Seguridad Social, etc.), a cargo de la empresa, del 25 % adicional. Así el coste salarial para la empresa (CSE) anual sería:

$$CSE = 26.500 \times 1,25 = 33.125\text{€}$$

³Fuente: Infojobs

⁴Este salario nos permite inferir una experiencia de unos 3 años en tareas relacionadas, y una capacidad y talento suficientes para terminar con éxito este PFC.

Dado que este proyecto requiere, por planificación, de once meses de trabajo⁵ como ingeniero técnico, el coste de personal (CP) asociado al proyecto asciende a:

$$CP = CSE \times 11/12 = 30.365\text{€} \quad (11.1)$$

11.2.3 Costes totales

Sumando ambos grupos de costes anteriormente calculados, de material (760 euros) y de personal (30.365 euros), afirmamos que el presupuesto total de este proyecto asciende a 31.125 euros (TREINTA Y UN MIL CIENTO VEINTICINCO EUROS).

Fdo.: Diego Méndez Romero, ingeniero técnico proyectista

⁵Ocho meses de un ingeniero técnico A y tres meses de un ingeniero técnico B, con cualificación similar, para las tareas que se simultanean.

Bibliografía

- [ALN07] Al-Naffouri, T. Y., “An EM-Based Forward-Backward Kalman Filter for the Estimation of Time-Variant Channels in OFDM”, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 55, n^o 7, págs. 3924-3930, julio de 2007.
- [AND01] Andrews, A.P., Grewal, M.S., *Kalman filtering: Theory and Practice using Matlab*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 2001.
- [AND79] Anderson, B. D. O. y Moore, J. B., *Optimal filtering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (EE.UU.), 1979.
- [ANG07] Angelosante, D., Biglieri, E., y Lops, M., “Multipath Channel Tracking in OFDM systems with an unknown number of paths”, *Proceedings of PIMRC* 2007, Atenas, Grecia.
- [ANG09] Angelosante, D., Biglieri, E., y Lops, M., “Sequential Estimation of Multipath MIMO-OFDM Channels”, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 57, n^o 8, págs. 3167-3181, marzo de 2009.
- [ARU02] Arulampalam, S., Maskell, S., Gordon, N. J. y Clapp, T., “A tutorial on particle filters for on-line non-linear/non-Gaussian Bayesian tracking”, *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 50, n^o 2, págs. 174-178, febrero de 2002.
- [BAN07] Banelli, P.; Cannizzaro, R. C.; Rugini, L., “Data-Aided Kalman Tracking for Channel Estimation in Doppler-Affected OFDM Systems”, *IEEE ICASSP 2007*, vol. 3, págs. 133-136, abril de 2007.
- [BAR03] Barhumi, I., Leus, G., y Moonen, M., “Optimal training design for MIMO OFDM systems in mobile wireless channels”, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 5, págs. 1615-1624, junio de 2003.
- [BEE95] van de Beek, J.-J.; Edfors, O.; Sandell, M.; Wilson, S. K.; y Borjesson, P. O., “On channel estimation in OFDM systems”, *Proc. VTC*, Chicago, IL (EE.UU.), págs. 815-819, julio de 1995.

- [BIG06] Biglieri, E. y Lops, M., “Multiuser detection using random-set theory”, EUSIPCO 2006, Florencia, Italia, 4-8 de septiembre de 2006.
- [BIG09] Biglieri, E., “How random-set theory can help wireless communications”, presentación en diapositivas, 2009.
- [BOX94] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., *Time series analysis: forecasting and control*, Prentice Hall, 1994.
- [BRO97] Brown, R. G., y Hwang, P. Y. C., *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: With MATLAB Exercises and and Solutions*, 3^a ed., Wiley, Nueva York (EE.UU.), 1997.
- [CAT89] Catlin, D. E., *Estimation, Control, and the Discrete Kalman Filter*, Springer-Verlag, Nueva York (EE.UU.), 1989.
- [CHE00] Chen, R., y Liu, J. S., “Mixture Kalman filters”, *J. Roy. Statist. Soc. (B)*, vol. 62, págs. 493-508, 2000.
- [CHE04] Chen, Wei, y Zhang, Ruifeng, “Kalman filter channel estimator for OFDM systems in time and frequency-selective fading environment”, *Proc. IEEE ICASSP '04*, vol. 4, págs. v-377 - iv-380, mayo de 2004.
- [CHO03] Chong, Ch.-Ch.; Laurenson, D.I.; Tan, C.M.; McLaughlin, S., “Modelling the dynamic evolution of paths of the wideband indoor propagation channels using the M-step, 4-state Markov model”, *5th European Personal Mobile Communications Conference*, págs. 181-185, abril de 2003.
- [CHU99] Chui, C. K., y Chen, G., *Kalman Filtering with Real Time Applications*, Springer, 1999.
- [DBM13] “Gratis surfen im Bahnhof”, en: mobil, n^o 11, noviembre de 2013, ISSN 0949-586X, pág. 30, ZDB-ID 1221702-5.
- [DBW13] “Schneller Surfen im ICE”, en DB Welt, n^o 7, 2013.
- [EDF96] Edfors, O., Sandell, M., Van de Beck, J. J., Wilson, S. K., y Borjesson, P. O., “OFDM channel estimation by singular value decomposition”, en *Proc. IEEE 46th Vehicular Technology Conference*, Atlanta, GA (EE.UU.), abril de 1996, págs. 923-9237.
- [EDF96b] Edfors, O., Sandell, M., van de Beck, J. J., Landström, D., y Sjöberg, F., “An introduction to orthogonal frequency-division multiplexing”, septiembre de 1996.

- [FLE96] Fleury, B.H.; Bernhard, U. P., y Heddergott, R., “Advanced radio channel model for magic WAND,” in *Proc. ACTS Mobile Telecommunications Summit*, págs 600–607, 1996.
- [GEL74] Gelb, A.; Kasper, J.F., Jr.; Nash, R. A., Jr.; Price, C. F. y Sutherland, A. A., *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, MA (EE.UU.), 1974.
- [GOO97] Goodman, I., Mahler, R. y Nguyen, H., *Mathematics of Data Fusion*, Norwell, MA: Kluwer Academic, 1997.
- [GRE93] Grewal, M. S., y Andrews, A. P., *Kalman filtering: theory and practice*, Prentice-Hall, 1993.
- [HAJ81] Hajek, K., *Sampling from a Finite Population*. Marcel Dekker, Nueva York, 1981.
- [HAM94] Hamilton, J. D., *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [HSI98] Hsieh, M. H., y Wei, C. H., “Channel estimation for OFDM systems based on comb-type pilot arrangement in frequency selective fading channels”, *IEEE Trans. on Consumer Electronics*, vol. 44, no. 1, págs. 217-225, febrero de 1998.
- [HUA14] Huaquiang Shu; Ros, L; Simon E. P., “Simplified Random-Walk-Model-Based Kalman Filter for Slow to Moderate Fading Channel Estimation in OFDM Systems”, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 62, n^o 15, págs. 4006 - 4017.
- [JAK14] Jakobsen, M.L.; Pedersen, T.; Fleury, B.H., “Analysis of stochastic radio channels with temporal birth-death dynamics: a marked spatial point process perspective”, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 62, n^o 7, págs. 3761-3775, abril de 2014.
- [JIA05] Jianqiu Zhang, “On the bounds of the non-coherent capacity of Gauss-Markov fading channels”, *IEEE Int’l Conf. on Ac., Sp., and Sig. Proc. (ICASSP ’04)*, vol. 3, págs. 757-760, marzo de 2005.
- [KOM05] Komninakis, C.; Fragouli, C.; Sayed, A. H.; y Wesel, R. D., “Multi-input multi-output fading channel tracking and equalization using Kalman estimation”, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, n^o 5, págs. 1065-1076, mayo de 2002.

- [NGU06] Nguyen, H. T., *An introduction to random sets*, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [KEN74] Kendall, D.G., "Foundations of a theory of random sets." en *Stochastic Geometry*, págs. 322-376. J. Wiley, Nueva York, 1974.
- [KAL60] Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, vol. 82, págs. 35-45, 1960.
- [KOL50] Kolmogorov, A. N. *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea, Nueva York, 1950.
- [KIV01] Kivinen, J., Zhao, X., y Vainikainen, P., "Empirical characterization of wideband indoor radio channel at 5.3 GHz", *IEEE Trans. on Antennas and propagation*, vol. 49, no. 8, págs.1192 -1203, 2001.
- [KIY04] Ki-Young Han, Sang-Wook Lee, Jun-Seok Lim, Koeng-Mo Sung, "Channel estimation for OFDM with fast fading channels by modified Kalman filter", *IEEE Trans. on Cons. Electr.*, vol. 50, n^o 2, mayo de 2004.
- [KYE05] Kyeong Jin Kim ; Nokia Res. Center, Irving, TX, USA ; Jiang Yue ; Iltis, R.A. ; Gibson, J.D., "A QRD-M/Kalman filter-based detection and channel estimation algorithm for MIMO-OFDM systems", *IEEE Trans. on Wireless Comms.*, vol. 5, n^o 2, págs. 710-721, marzo de 2005.
- [LI_00] Li, Y., Cimini, L. J., y Scollenberger, N. R., "Robust channel estimator for OFDM systems with rapid dispersive fading channels," *IEEE Trans. Comms.*, vol. 46, no. 7, pp. 902-915, julio de 1998.
- [MA_06] Ma, W.-K., Vo, B.-N., Singh, S. S., y Baddeley, A., "Tracking an unknown time-varying number of speakers using TDOA measurements: a random finite set approach", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 9, págs. 3291-3304, septiembre de 2006.
- [MAH03] Mahler, R., "Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments", *IEEE Trans. AES*, vol. 39, págs. 1152-1178, 2003.
- [MAT75] Mathéron, G. *Random Sets and Integral Geometry*. J.Wiley, Nueva York, 1975.

- [MIN00] Minn, H. y Bhargava, V. K., “An investigation into time-domain approach for OFDM channel estimation”, *IEEE Trans. Broadcasting*, vol. 46, no. 4, págs. 240-248, diciembre de 2000.
- [MIS04] Misra, S., Swami, A., y Lang Tong, “Optimal training over the Gauss-Markov fading channel: a cutoff rate analysis”, *IEEE Int’l Conf. on Ac., Sp., and Sig. Proc. (ICASSP ’04)*, vol. 3, págs. 809-812, mayo de 2004.
- [MOL05] Molchanov, I., *Theory of Random Sets*, Springer, 2005.
- [MOL05b] Molchanov, I., *Random Closed Sets*, en *Space, Structure and Randomness*, págs. 135-149. Springer, 2005.
- [NET12] Nettleton, D. “Introduction to the Gauss-Markov Linear Model”, Iowa University, en <http://www.public.iastate.edu/~dnettt/S511/01Introduction.pdf>, 2012.
- [NEE00] Nee, R.V. y Prasad, R., *OFDM for Wireless Multimedia Communications*, Artech House, 2000.
- [OPP89] Oppenheim, A. y Schafer, R., *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall, 1989.
- [POR94] B. Porat, *Digital Processing of Random Signals: Theory and Methods*. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1994, págs. 152-181.
- [RIS11] Ristic, B., “Bayesian Estimation With Imprecise Likelihoods: Random Set Approach”, en *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 18, n^o 7, págs. 395-398, julio de 2011).
- [RIS13] Ristic, B., *Particle filters for random set models*, Springer, 2013.
- [ROB44] Robbins, H.E., “On the measure of a random set”, en *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 15, n^o 1, págs. 70-74, 1944.
- [SAF97] Safaya, R., “A multipath channel estimation algorithm using a Kalman filter”, Tesis de Máster para el Illinois Institute of Technology, Chicago, 1997.
- [SHA88] Shanmugan, K. S., Breipohl, A. M., *Random signals: detection, estimation and data analysis*, Wiley, 1988.
- [SIM04] Simeone, O. y Spagnolini, U., “Adaptive pilot pattern for OFDM systems”, *IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol. 2, págs. 978-982, junio de 2004.

- [SVE13] Svensson, A., “The particle filter explained without equations” (disponible en YouTube), octubre de 2013.
- [VIH04] Vihola, M., “Random sets for multitarget tracking and data fusion”, Tesis de Licenciatura para Tampere University of Technology, agosto de 2004.
- [VIH09] Vihola, M., “Rao-Blackwellized particle filtering in random set multiple-target tracking”, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 43, n^o 2, págs. 689-705, abril de 2007.
- [VO_05] Vo, B.-N., Singh, S., y Doucet, A., “Sequential Monte Carlo methods for Bayesian multi-target filtering with random finite sets”, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 41, n^o 4, págs 1224-1245, octubre de 2005.
- [YAN01] Yang, B., Letaief, K. B., Cheng, R. S., y Cao, Z., “Channel estimation for OFDM transmission in multipath fading channel based on parametric channel model”, *IEEE Trans. Comm.*, vol. 49, n^o 3, págs 467-479, marzo de 2001.
- [YAN02] Yang, Z., Wang, X., “A sequential Monte Carlo blind receiver for OFDM systems in frequency selective fading channels”, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 41, n^o 4, págs. 1224-1245, octubre de 2005.
- [YUA03] Yuanjin, Z., “A novel channel estimation and tracking method for wireless OFDM systems based on pilots and Kalman filtering”, *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. 49, n^o 2, págs. 275-283, mayo de 2003.
- [ZHA04] Zhang, Ruifeng y Chen, Wei, “A mixture Kalman filter approach for blind OFDM channel estimation”, *Conf. Record 38th Asilomar Conf on Signals, Systems and Computers*, vol. 1, págs. 350-354, noviembre de 2004.

Apéndice A

Un modelo de canal multitrayecto basado en RST

En este anexo, se desarrollará un modelo para el canal multitrayecto aplicando la Teoría de Conjuntos Aleatorios (o RST, del inglés *Random Set Theory*) o Estadística de Conjuntos Aleatorios Finitos, y se deducirán las expresiones matemáticas de los estimadores bayesianos convenientes bajo la suposición de un sistema OFDM con varias subportadoras piloto. También se describirá su posible implementación práctica.

En todo el siguiente desarrollo, estaremos siguiendo el razonamiento pionero de [ANG07]. Por tanto, más allá de intentar mejorar la claridad de la exposición y presentarla en lengua española, la originalidad del planteamiento se debe a los autores de ese *paper*, cuya notación también seguiremos.

A.1 Planteamiento del problema

Empecemos por plantear el problema: consideremos un sistema OFDM que emplea K subportadoras ortogonales: N subportadoras, que ocupan la parte central del espectro, se utilizan para transmisión, mientras que $K - N$ subportadoras ubicadas en los límites se ponen a cero con el fin de evitar la interferencia fuera de banda. El flujo de datos, después de la conversión de serie a paralelo, se particiona en bloques de longitud N_{inf} , al tiempo que $N_{pt} = N - N_{inf}$ símbolos pilotos se entremezclan o barajan uniformemente con los datos (*interleaving*) para permitir la estimación del canal: el sistema de modulación resultante sería una malla de tiempo-frecuencia en la cual unas subportadoras (unas líneas de puntos en la malla) se dedicaran exclusivamente a datos y otras subportadoras (otras líneas de puntos en la malla) se dedicaran exclusivamente a hacer de pilotos.

Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que las contribuciones de los filtros de transmisión y recepción pueden ser compensadas y denominando como i_m , con $m = 1, \dots, N_{pt}$, el índice de la m -ésima subportadora piloto y por p el intervalo de señalización, la señal observada, que será procesada para realizar la estimación del canal, se puede expresar en forma vectorial (según [YAN01]) como:

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{F}_p \mathbf{h}_p + \mathbf{z}_p \quad (\text{A.1})$$

donde

- \mathbf{y}_p es un vector $[y_{p,i_1}, \dots, y_{p,i_{N_{pt}}}]^T$ cuyos elementos y_{p,i_k} representa la muestra de la observación de la k -ésima subportadora piloto en el instante p
- \mathbf{D}_p es una matriz diagonal $\text{diag}(d_{p,i_1}, \dots, d_{p,i_{N_{pt}}})$ cuyos elementos diagonales d_{p,i_k} están formados por los datos de entrenamiento de la subportadora k -ésima en el instante p
- \mathbf{z}_p es un vector $[z_{p,i_1}, \dots, z_{p,i_{N_{pt}}}]^T$ cuyos elementos z_{p,i_k} representan el ruido aditivo gaussiano y complejo de media cero con varianza σ_z^2
- \mathbf{h}_p es el vector $[h_1(pT_s), \dots, h_{L(pT_s)}(pT_s)]^T$ de las ganancias complejas $h_l(pT_s)$ del trayecto l -ésimo en el instante p , y
- \mathbf{F}_p es una matriz de elementos $\{F_p\}_{m,l} = e^{-j2\pi i_m \frac{\tau_l(pT_s)}{NT}}$ para $m = 1, \dots, N_{pt}$ y $l = 1, \dots, L(pT_s)$, siendo $L(pT_s)$ el número de trayectos activos y $\tau_l(pT_s)$ el retardo del trayecto l -ésimo durante el intervalo p -ésimo.

Nota: T representa el intervalo de muestreo y T_s la duración temporal de un símbolo OFDM. Hay que tener en cuenta que $T_s = NT + T_g$, donde T_g es el tiempo de guarda. Si la dispersión por retardo (*delay spread*) debida a la multiplicidad de trayectos es menor que el tiempo de guarda, la subportadora n -ésima en el instante p experimenta un desvanecimiento plano en el dominio de la frecuencia, con el coeficiente $H_{p,n}$ expresado como

$$H_{p,n} = \sum_{l=1}^{L(pT_s)} h_l(pT_s) e^{-j2\pi n \frac{\tau_l(pT_s)}{NT}} \quad (\text{A.2})$$

Una vez explicitadas la expresión de la señal piloto recibida y la malla con el patrón de símbolos del sistema OFDM planteado, estamos en condiciones de formular el problema de la manera siguiente: dadas las observaciones (A.1), y un modelo para la evolución de la respuesta del canal, determínese un estimador causal para

\mathbf{h}_p , sobre la base de $\{\mathbf{y}_{1:p}\}$, las observaciones disponibles hasta el intervalo p , y que incorpore toda la información a priori sobre el comportamiento del canal.

A.2 Enfoque tradicional (previo a la aplicación de RST)

Según [ANG07], un enfoque tradicional para resolver el problema enunciado en el párrafo precedente consiste en suponer que el vector a estimar tiene una longitud constante L_{\max} , correspondiente al número máximo de trayectos, e implementar recursiones bayesianas para obtener estimas de la secuencia de vectores $[h_1(pT_s), \dots, h_{L_{\max}}(pT_s)]^T$. La desaparición de un trayecto daría como resultado un cero en la entrada vectorial correspondiente. En realidad, esa es la teoría si los estimadores fueran perfectos, pero habría que partir de cierto margen de error debido a que la convergencia al cero no es inmediata). A pesar de ese inconveniente, la gran ventaja de este enfoque reside en que se podría aplicar el filtrado de Kalman, bien en su forma habitual (si el factor de cada trayecto evoluciona según un modelo gaussiano lineal o asimilable), o bien en su forma extendida (si el modelo presentara suficiente no linealidad como para justificarlo). Así, por ejemplo, se podría aplicar el esquema presentado en [YUA03].

En cambio, la aplicación de la Teoría de Conjuntos Aleatorios (o RST, por *Random Set Theory*), permitiría construir un estimador (calculable en un solo paso) de los trayectos activos; un estimador que incorporara toda la información disponible referente a la evolución del canal.

A.3 Enfoque basado en RST

El problema, antes expuesto, de obtener ese estimador, es muy próximo conceptualmente a problemas que se habían resuelto anteriormente en el contexto de seguimiento multi-objetivo en aplicaciones de radar (y en otras aplicaciones, principalmente de carácter militar), así como en el contexto de la detección multiusuario o multilocutor ([MA_06]).

En [ANG07], y, con pocas variaciones, nuevamente en [ANG09], se presentó el modelo RST para el caso en el que los múltiples trayectos del canal tuvieran retardos equiespaciados (el llamado modelo de canal TDL o *Tapped Delay Line*), que describimos a continuación.

Denótese por $\mathcal{H}_p^{(k)}$ el siguiente conjunto aleatorio, que puede estar formado por un solo elemento o vacío [GOO97, MAH03]:

$$\mathcal{H}_p^{(k)} = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si el trayecto } k \text{ no está presente} \\ \{\mathbf{h}_p^{(k)}\} = \{[k, a_p^{(k)}]^T\} & \text{si el trayecto } k \text{ está presente} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

En nuestra notación, $a_p^{(k)}$ es la ganancia compleja multitrayecto k -ésima (o sea, del trayecto k -ésimo del canal multitrayecto) en el momento p . La realizaciones del canal en el instante p quedan, por tanto, descritas totalmente por el conjunto

$$\mathcal{H}_p = \bigcup_{k=1}^{L_{\text{máx}}} \mathcal{H}_p^{(k)} \quad (\text{A.4})$$

que constituye un conjunto aleatorio en el espacio híbrido $\{1, \dots, L_{\text{máx}}\} \times \mathbb{C}$. Un espacio híbrido es el equivalente conceptual a un espacio producto cuando, en vez de espacios métricos, lo que tenemos son espacios de conjuntos aleatorios. Para el lector interesado en entender los detalles sobre las diferencias entre los conceptos asociados a espacios métricos (medidas, integrales, probabilidad, etc.) y los conceptos duales generalizados a cualquier espacio de conjuntos aleatorios, se recomienda encarecidamente (no sin advertir de su complejidad) consultar las explicaciones de [MAH03, GOO97, NGU06] y, sobre todo, [VIH04], por su carácter eminentemente lectivo y su facilidad para combinar el (suficiente, a nuestros efectos) rigor matemático con la claridad de la exposición y los ejemplos prácticos.

Dado, por tanto, que ese espacio híbrido es “más o menos como” un espacio producto de espacios métricos “normales”, también podemos definir sobre espacio híbrido unas aplicaciones de proyección. La idea, explicada en términos llanos, consiste en que hemos definido un espacio de “coordenadas” en el que una coordenada será el número de trayecto (p. ej. 2 para el segundo trayecto) y otra coordenada será la ganancia compleja vigente en ese trayecto (p. ej., $0,5 + 0,2i$). Por tanto, un canal en un determinado instante podría quedar determinado por los números asociados a sus trayectos activos (p. ej., 1, 3 y 4) y las respectivas ganancias complejas.

En términos matemáticos, si queremos obtener solamente uno de esos dos grupos de coordenadas (bien los trayectos activos o bien las ganancias complejas), estaríamos haciendo una proyección, similar a la proyección sobre el eje X de un punto en el plano complejo. Esas proyecciones, los conjuntos aleatorios $\pi(\mathcal{H}_p)$ y $\pi'(\mathcal{H}_p)$, que denotan las proyecciones de \mathcal{H}_p sobre $\{1, \dots, L_{\text{máx}}\}$ y sobre \mathbb{C} , respectivamente, adoptan la siguiente forma:

$$\pi(\mathcal{H}_p) = \bigcup_{k: \mathcal{H}_p^{(k)} \neq \emptyset} \{k\} \quad (\text{A.5})$$

$$\pi'(\mathcal{H}_p) = \bigcup_{k \in \pi(\mathcal{H}_p^{(k)})} \{a_p^{(k)}\} \quad (\text{A.6})$$

Si \mathcal{S}_p denota el conjunto de trayectos que sobreviven (con S de superviviente o *survivor*) del instante $p - 1$ al instante p , y \mathcal{B}_p es el conjunto de trayectos recién nacidos (con B, del inglés *born*), entonces tenemos:

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{S}_p \cup \mathcal{B}_p \quad (\text{A.7})$$

Las restricciones de (A.5) y (A.6):

$$\pi(\mathcal{H}_{p-1}) \cap \pi(\mathcal{B}_p) = \emptyset \quad (\text{A.8})$$

$$\pi(\mathcal{S}_p) \subseteq \pi(\mathcal{H}_{p-1}) \quad (\text{A.9})$$

reflejan los hechos de que ningún componente que esté activo en el momento $n - 1$ puede pasar al conjunto de trayectos nuevos, y de que los trayectos que sobreviven en el instante p son un subconjunto de los activos en el instante $p - 1$. Para simplificar el desarrollo, podríamos suponer que solo puede nacer, como máximo, un nuevo trayecto en cada instante. Esta simplificación se realiza, p. ej. en [ANG07, ANG09, MA_06], y en nuestro caso supone definir el conjunto de trayectos nuevos (“recién nacidos”) como:

$$\mathcal{B}_p = \begin{cases} \{[l, a_p^{(l)}]^T\} & \text{con probabilidad } P_{birth} \\ \emptyset & \text{con probabilidad } 1 - P_{birth} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

con $l \in \{1, \dots, L_{m\acute{a}x}\} \setminus \pi(\mathcal{H}_{p-1})$, y P_{birth} la probabilidad de que nazca un nuevo trayecto. (Nota: esta simplificación no es un requisito fundamental para aplicar RST, pero, como su propio nombre sugiere, simplifica bastante las cosas¹). Aplicando esta información, podemos calcular la densidad de probabilidad condicionada:

¹La simplificación es asumible en la práctica totalidad de los casos útiles. Piénsese que, para una probabilidad de nacimiento del 5 % (un nacimiento cada 20 muestras de media) y un número de trayectos $L_{m\acute{a}x} = 3$, la probabilidad de que nazca más de un trayecto es de $0,05 \times (0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05) = 0,00475$. Por tanto, la simplificación falla en menos del 0,5 % de las veces y, en cualquier caso, la única consecuencia negativa que cabría esperar de este fallo es que produzca un retraso de una muestra en la identificación de cada trayecto adicional nacido simultáneamente.

$$f_{\mathcal{B}_p|\mathcal{H}_{p-1}}(\mathcal{B}_p|\mathcal{H}_{p-1}) = \begin{cases} P_{birth} f_{a_p^{(l)}}(a_p^{(l)}) & \text{si } \mathcal{B}_p = \{[l, a_p^{(l)}]^T\} \\ 1 - P_{birth} & \text{si } \mathcal{B}_p = \emptyset \\ 0 & \text{si } |\mathcal{B}_p| > 1 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

donde $l \in \{1, \dots, L_{m\acute{a}x}\} \setminus \pi(\mathcal{H}_{p-1})$, y $f_{a_p^{(l)}}(a_p^{(l)})$ es la funci3n de densidad de probabilidad de la ganancia del trayecto l -3simo en el instante p . De manera an3loga, podemos obtener:

$$\mathcal{S}_p = \bigcup_k \mathcal{S}_p^{(k)} \quad (\text{A.12})$$

con

$$\mathcal{S}_p^{(k)} = \begin{cases} \emptyset & \text{con probabilidad } P_{death} \\ \{\mathbf{h}_p^{(k)}\} & \text{con probabilidad } 1 - P_{death} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

donde P_{death} es la probabilidad de que desaparezca un trayecto activo (probabilidad de muerte). Suponiendo que los distintos trayectos sobreviven o mueren de manera independiente (respecto de los dem3s), tenemos las siguientes propiedades:

- La funci3n de densidad de probabilidad condicional del conjunto aleatorio \mathcal{S}_p dado \mathcal{H}_{p-1} puede deducirse de la convoluci3n generalizada de las funciones de densidad de probabilidad de los conjuntos aleatorios $\mathcal{S}_p^{(k)}$ [MA_06, BIG06, ANG07]:

$$f_{\mathcal{S}_p|\mathcal{H}_{p-1}}(\mathcal{S}_p|\mathcal{H}_{p-1}) = P_{death}^{|\mathcal{H}_{p-1}| - |\mathcal{S}_p|} (1 - P_{death})^{|\mathcal{S}_p|} \prod_{l \in \pi(\mathcal{S}_p)} f_{a_p^{(l)}|a_{p-1}^{(l)}}(a_p^{(l)}|a_{p-1}^{(l)}) \quad (\text{A.14})$$

donde $\mathcal{S}_p \subseteq \mathcal{H}_{p-1}$, y $f_{a_p^{(l)}|a_{p-1}^{(l)}}(a_p^{(l)}|a_{p-1}^{(l)})$ es la densidad de transici3n que describe la evoluci3n de las ganancias de los trayectos supervivientes.

- Las secuencias de conjuntos aleatorios \mathcal{S}_p y \mathcal{B}_p son condicionalmente independientes dado \mathcal{H}_{p-1} .
- $(\mathcal{H}_p)_{p=1}^\infty$ forma una secuencia de Markov.

Por consiguiente, la densidad de transici3n $f_{\mathcal{H}_p|\mathcal{H}_{p-1}}(\mathcal{H}_p|\mathcal{H}_{p-1})$ puede determinarse a su vez por medio de la f3rmula de convoluci3n generalizada, la cual, al especificarse para el escenario actual, da como resultado [BIG06, ANG07]:

$$f_{\mathcal{H}_p|\mathcal{H}_{p-1}}(\mathcal{H}_p|\mathcal{H}_{p-1}) = f_{\mathcal{S}_p}(\mathcal{H}_p \cap \mathcal{H}_{p-1}) f_{\mathcal{B}_p}(\mathcal{H}_p \setminus (\mathcal{H}_p \cap \mathcal{H}_{p-1})|\mathcal{H}_{p-1}) \quad (\text{A.15})$$

El paso básico para obtener estimaciones causales de la secuencia de conjuntos aleatorios $(\mathcal{H}_p)_{p=1}^\infty$ sobre la base de las observaciones $\mathbf{y}_{1:p}$ es la implementación de recursiones bayesianas [MAH03] de la forma:

$$f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p-1}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p-1}) = \int f_{\mathcal{H}_p|\mathcal{H}_{p-1}}(\mathcal{H}_p|\mathcal{H}_{p-1}) f_{\mathcal{H}_{p-1}|\mathbf{y}_{1:p-1}}(\mathcal{H}_{p-1}|\mathbf{y}_{1:p-1}) \delta \mathcal{H}_{p-1} \quad (\text{A.16})$$

$$f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}) \propto f_{\mathbf{y}_p|\mathcal{H}_p}(\mathbf{y}_p|\mathcal{H}_p) f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p-1}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p-1}) \quad (\text{A.17})$$

Llegados a este punto, hay que recordar que estamos trabajando con espacios de conjuntos aleatorios generalizados, y no con espacios métricos convencionales. Por este motivo, las integrales no son las convencionales (no son integrales sobre espacios métricos convencionales) y la diferencial $\delta \mathcal{H}_{p-1}$ de (A.16) enfatiza el hecho de que se trata de una integral de conjunto, como la que se presentó en [GOO97]. Para más detalles al respecto, se recomienda leer la explicación sobre integrales de conjunto incluida en [VIH04].

¿Se pueden resolver las integrales (A.16)-(A.17)? En general, no parece viable obtener soluciones explícitas (en el sentido de expresiones cerradas) para esas integrales, a pesar de la gran simplificación que suponen los parámetros de partida (la desaparición y el nacimiento de los canales podrían ser paulatinos, etc.) y a pesar de simplificaciones que vendrán más adelante (como simular la variación temporal de los trayectos activos como modelos de Gauss-Markov lineales). Nos encontramos, por tanto, ante el mayor escollo de este desarrollo: la incapacidad de obtener una solución óptima en forma explícita y computable sin una complejidad muy elevada. Precisamente este problema es el que venimos a justificar en esta investigación.

Dicho esto, la solución que se propone en [ANG07] consiste en recurrir al métodos de “filtrado de partículas” o Monte Carlo Secuencial (SMC, de sus siglas en inglés) para aproximar las recursiones bayesianas [ARU02]. Este filtro SMC de conjuntos aleatorios finitos se describe a continuación. La función de densidad de probabilidad *a posteriori* se aproxima mediante un conjunto de partículas como:

$$f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}) \approx \sum_{i=1}^M \omega_p^{(i)} m_{\mathcal{H}_p}(\mathcal{H}_p^{(i)}) \quad (\text{A.18})$$

donde $m_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ es la medida “0-1”, tal y como se define a continuación:

$$\int_C m_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) \delta \mathcal{X} = \begin{cases} 1, & \text{si } Y \subseteq C \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Si el lector no está familiarizado con los filtros de partículas, se recomienda que consulte [SVE13] para una primera explicación intuitiva sin ecuaciones, y, posteriormente, si desea profundizar en su conocimiento o implementar uno, puede recurrir a ciertos tutoriales² para un caso general, a [VIH04] para filtros SMC sobre conjuntos aleatorios finitos (como el que nos ocupa), y a [RIS13] para las aplicaciones más avanzadas de filtros de partículas sobre modelos de conjuntos aleatorios. Avalamos la calidad y la utilidad de tales referencias.

Volviendo al desarrollo del modelo, en (A.3.16), $\mathcal{H}_p^{(i)}$ es la “partícula” del conjunto i -ésimo, $\omega_p^{(i)}$ es su “peso” o factor de ponderación, y M es el número total de partículas. Las propiedades de convergencia asintótica del filtro SMC sobre conjuntos aleatorios finitos han sido probadas en [VO_05], donde los autores probaron que, para una M suficientemente grande, el error cuadrático medio de aproximación del filtro SMC sobre conjuntos aleatorios finitos es inversamente proporcional a M^α , para alguna constante $0 < \alpha \leq 1$, mientras que la complejidad de la implementación es aproximadamente lineal con M .

Una vez que se ha obtenido la densidad a posteriori $f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p})$, existen varias formas de conseguir una estimación de \mathcal{H}_p , tal y como se explica en [GOO97]. De hecho, y siguiendo aquí las elecciones tomadas en [ANG07] (cuyo desarrollo, repetimos, forma la base de este apéndice), podemos definir un par de estimadores bayesianos, conocidos como GMAP-I (o “estimador multiobjetivo marginal”) y GMAP-II (o “estimador multiobjetivo conjunto”). GMAP-I es un estimador de dos etapas, en el que primero se estima la cardinalidad del conjunto (cuántos elementos tiene el conjunto).

Con la siguiente definición

$$f_{n_p|\mathbf{y}_{1:p}}(n_p|\mathbf{y}_{1:p}) \triangleq \int_{|\mathcal{H}_p|=n_p} f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}) \delta \mathcal{H}_p \quad (\text{A.20})$$

podemos obtener las siguientes expresiones:

$$\text{GMAP-I: } \begin{cases} \hat{n}_p = \arg \max_{n_p \in 0, \dots, L_{\max}} f_{n_p|\mathbf{y}_{1:p}}(n_p, \mathbf{y}_{1:p}), \\ \hat{\mathcal{H}}_p = \arg \max_{\mathcal{H}_p: |\mathcal{H}_p|=\hat{n}_p} f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p, \mathbf{y}_{1:p}), \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Por el contrario, GMAP-II realiza la estimación en una sola etapa:

$$\hat{\mathcal{H}}_p = \arg \max_{\mathcal{H}_p} f_{\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}}(\mathcal{H}_p|\mathbf{y}_{1:p}) \frac{c^{|\mathcal{H}_p|}}{|\mathcal{H}_p|!} \quad (\text{A.22})$$

²Los tutoriales de Student Dave, también conocido como Bayesian Ninja (disponibles en YouTube y en su web studentdavestutorials.weebly.com) son muy recomendables y permiten visualizar mejor el problema en el entorno Matlab.

donde c es una constante pequeña que viene determinada por la función de coste que minimice este estimador [GOO97]. (Aclaración: recordamos de nuevo que $|\mathcal{H}_p|$ representa la cardinalidad de \mathcal{H}_p , esto es, el número de trayectos activos en el instante p).

Además, en [ANG07] se propone una tercera regla de estimación que, finalmente, en las simulaciones [ANG07, ANG09] resulta superior a las dos anteriores. Consiste en estimar primero las identidades de los trayectos activos en el instante p (p. ej., en vez de estimar que hay dos trayectos activos como en GMAP-I, estimar que los trayectos activos son el 1 y el 3), y luego estimar solamente los pesos de los trayectos activos como el valor esperado *a posteriori*, al tiempo que se ponen a cero los pesos correspondientes a los trayectos inactivos. En concreto, los autores definieron el estimador GMAP-III como:

$$\text{GMAP-III} : \begin{cases} \widehat{\pi(\mathcal{H}_p)} = \arg \max_{\pi(\mathcal{H}_p)} f_{\pi(\mathcal{H}_p)|\mathcal{Y}_{1:p}}(\pi(\mathcal{H}_p)|\mathcal{Y}_{1:p}), \\ \tilde{\mathbf{h}}_p = \int_{\mathbb{R}^{2|\widehat{\pi(\mathcal{H}_p)}|}} \mathbf{h}_p f_{\mathbf{h}_p|\mathcal{Y}_{1:p}}(\mathbf{h}_p|\mathcal{Y}_{1:p}) d\mathbf{h}_p \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

donde

$$f_{\pi(\mathcal{H}_p)|\mathcal{Y}_{1:p}}(\pi(\mathcal{H}_p)|\mathcal{Y}_{1:p}) = \int_{\pi'(\mathcal{H}_p)} f(\mathcal{H}_p|\mathcal{Y}_{1:p}) \delta\mathcal{H}_p \quad (\text{A.24})$$

Esta última integral se puede explicar intuitivamente como que integramos (sumamos) la probabilidad de \mathcal{H}_p (esto es, de todos los conjuntos hipotéticos de cierto número de trayectos activos) a lo largo de todos sus posibles valores continuos. Por tanto, como queda patente, en GMAP-III primero se estima el parámetro discreto (de manera similar a GMAP-I) y, a continuación, se calcula la estimación estándar de la esperanza *a posteriori*.

A.4 Ventajas del modelo RST y posibles ampliaciones paramétricas

La principal ventaja de este modelo (respecto de las alternativas preexistentes) consiste en que las simulaciones mostraron una gran ventaja de su estimación respecto del filtro de Kalman no modificado y respecto de la estimación por mínimos cuadrados sin KF.

Esto supuso un avance en la comprensión del problema respecto de estudios como [YUA03], que defendía la utilización de un filtrado de Kalman (con ciertas modificaciones) sin tener en cuenta el efecto de la desaparición y el nacimiento de trayectos (cuya no linealidad introduce errores significativos en un filtrado de Kalman), así

como respecto de estudios como [YAN02], donde se consideraba un estimador de canal para un número constante de trayectos de canal, que trataba de seguir cinco componentes multitrayecto cuando el número real de trayectos era solo de tres. El resultado de este último trabajo era una leve degradación de las prestaciones por seguir cinco en vez de solo tres. Sin embargo, la situación propuesta por los *papers* de Angelosante, Biglieri y Lops va más allá: ¿qué pasa cuando el número de trayectos varía dentro de una misma transmisión? Ahí cabe esperar grandes reducciones en las prestaciones de un estimador que solamente siga un modelo lineal (filtrado de Kalman) sin incorporar ninguna información estocástica sobre el comportamiento no lineal (la desaparición y el nacimiento de trayectos), tal y como ya justificamos en la simulación 4 (capítulo 9).

La primera ampliación paramétrica de este trabajo se presentó en [ANG09], adaptándolo para un sistema de transmisión con múltiples antenas emisoras y múltiples antenas receptoras que trabajaran con OFDM (esto es, un sistema MIMO-OFDM). Resolviendo el problema de estimación mediante RST, esto es, considerando nuevamente la respuesta del canal multitrayecto como una única entidad aleatoria que toma valores en un espacio de conjuntos (o sea, un conjunto aleatorio). Las expresiones resultantes para la estimación son muy complejas y carecemos de soluciones explícitas para ellas, por lo cual los autores recurrieron a una estrategia conocida como Rao-Blackwellización. La Rao-Blackwellización había sido propuesta previamente por [VIH09] para el seguimiento multiobjetivo: una técnica que, para reducir la complejidad, marginaliza analíticamente algunas de las variables aleatorias (las que son gaussianas y tienen aspecto lineal) respecto de la densidad de filtrado conjunta.

En otras palabras, la Rao-Blackwellización consiste en implementar un filtro de partículas de manera que se estime la parte no lineal del modelo mediante SMC, mientras que la parte lineal se estima mediante filtrado de Kalman convencional. Con esta técnica se mejora la eficiencia del estimador al reducir la varianza de las estimaciones SMC y su complejidad. Su desventaja es que parte de una simplificación y, por tanto, los resultados solo son buenos cuando realmente sea aplicable esa simplificación (a saber, que el sistema considerado debe ser condicionalmente gaussiano y lineal). Teniendo en cuenta que partíamos de una situación asimilable al caso gaussiano y lineal (pues el filtro de Kalman no modificado venía dando resultados aceptables, y, por consiguiente, se había construido el comportamiento estocástico del canal multitrayecto en [ANG07, ANG09] como un modelo de Gauss-Markov lineal), la estrategia de Rao-Blackwellización es inteligente y práctica. Utilizando notación similar a la del apartado anterior, podemos describir el filtro de partículas

Rao-Blackwellizado como la aplicación de estos dos pasos básicos [ANG09]:

- 1) muestrear $\pi(\mathcal{H}_{m;1:t})$ utilizando métodos SMC eficientes;
- 2) evaluar $f(\pi'(\mathcal{H}_{m;1:t}|\pi(\mathcal{H}_{m;1:t}), \mathbf{y}_{m;1:t}))$ mediante filtrado de Kalman para cada muestra de $\pi(\mathcal{H}_{m;1:t})$;

Las simulaciones demostraron que este estimador basado en filtrado de partículas Rao-Blackwellizado (RBPF, de *Rao-Blackwellized Particle Filter*) superaba muy significativamente las estimaciones obtenidas por filtrado de Kalman o por mínimos cuadrados (en el sentido de [BAR03]) para este caso MIMO-OFDM.

Otra ampliación paramétrica presentada en [ANG09] consiste en describir la aplicación de RST cuando los retardos de los trayectos no son múltiplos enteros de un retardo base (esto es, cuando no están equiespaciados, aunque siempre se parte de un número finito de retardos/trayectos posibles).

Por todo esto, y aun contando con las desventajas producidas por una complejidad que amenaza la viabilidad de su implementación práctica, etc., se puede considerar que la aplicación de RST al problema de la estimación y el seguimiento de canales multitrayecto ha tenido resultados positivos: ha mejorado nuestra comprensión del problema, ha creado un modelo abierto a eventuales ampliaciones paramétricas, y ha permitido encontrar estimadores matemáticamente óptimos y relativamente eficientes con los que comparar futuras alternativas.